内蒙古大学学术著作出版基金资助

数学分析基础原理

A FOUNDATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS

曹之江 编著

内蒙古大学出版社

数学分析基础原理

曹之江　编著

内 蒙 古 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析基础原理/曹之江编著.—呼和浩特：内蒙古大学出版社，2004.2

ISBN 7—81074—618—9

Ⅰ.数… Ⅱ.曹… Ⅲ.数学分析—基础理论 Ⅳ.0171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 006795 号

书名	数学分析基础原理
编著	曹之江
责任编辑	侯富英
封面设计	敖全英
出版	内蒙古大学出版社 呼和浩特市大学西路 235 号(010021)
发行	内蒙古新华书店
印刷	内蒙古瑞德教育印务股份有限公司呼市分公司
开本	880×1230/32
印张	5.625
字数	138 千
版期	2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 7—81074—618—9/O·42
定价	13.90 元

曹之江　数学教授。1934 年 11 月出生于浙江上虞，1957 年毕业于北京大学数学力学系，毕业后赴内蒙古大学任教至今。历任数学系主任，大学副校长，兼任教育部数学力学天文学教材编审委员会、数学力学教学指导委员会委员兼理科数学教材建设组组长、教学指导组组长，内蒙古数学会理事长等职。科研上主要致力于微分算子理论的研究，在国内首创奇异对称微分算子亏指数与构造性理论的研究方向，在奇异微分算子自伴性解析描述问题上，取得了突破性的成果，受到了国内外学术同行的瞩目。先后获内蒙古科技进步奖一项，国家教委科技进步奖二项，发表重要创新论文二十余篇，撰写出版专著、译著和教材共十册。他在教学上同样有很大的建树，曾获国家级优秀教学成果奖，高教优秀研究论文奖，宝钢优秀教师奖等多项奖励。由于杰出的工作，2003 年他荣获首届国家级高校百名教学名师奖。2004 年他所领导的内蒙古大学数学分析课程被教育部评为首批国家精品课程。

内蒙古大学学术著作出版基金
2002 年度资助书目

蒙古语语法信息词典框架设计

影印整理《蒙古游牧记》

自然之子—陶渊明

数学分析基础原理

西方文明进程

内蒙古自治区经济与社会可持续发展研究

英语与法语的相互影响

现代国际法新论

蒙古学汉文古籍金石碑刻题录

二茂铁中间体制备

序

1687年，牛顿(Newton,I.)发表了划时代的巨著《自然哲学的数学原理》，向全世界提示了主宰着冥冥宇宙的万有引力机制，同时也首次公布了他为创建自己的动力学体系而发明的流数术与反流数术，即后来所谓的微分法和积分法. 差不多在同一时期，欧洲大陆的莱布尼兹(Leibniz,G. W.)，也独立地从几何的角度出发，创立了微分和积分.

微积分的问世，完全冲破了传统的数学仅仅只以静态、孤立的量为推算对象的局限，而破天荒地将物质的运动及轨道，不同量之间的变化制约关系作为运算和研究的对象，从而使自己成为对现实世界中各种动力机制(包括社会与经济机制)和运动形态进行定量研究的基本语言和锐利武器. 这就使得微积分的方法，从问世之日起，即以惊人的活力和汹涌的气势，长驱直入地占领了天文学、力学、物理学以至一切自然科学和应用技术，并渗入到社会经济文化生活的各个领域，决定性地促进了现代科技文明的产生与飞速发展.

但微积分在创建后近二百年的时间里，它基本上还只是一种“术”，一种在物理科学领域里得心应手的高级数学技术. 人们依靠了微积分的推算，发现了哈雷彗星、海王星、冥王星、预言了电磁波的存在，断言光就是电磁波等等. 微积分的这种匪夷所思的“神算”，直使得人们瞠目结舌，它的神威使得数学家们在相当长的一

段时间里，忙于拿着它向各种应用领域去开疆拓土，而未暇顾及微积分自身不稳固的基础.

然而现代科学与高精技术的发展，以及抽象数学发展的自身要求，都愈来愈需要微积分具有高度的严密性与准确性，不容毫忽的差失. 但是另一方面，发展着的微积分学，由于先天缺乏坚实的逻辑基础，它的很多结果，都得自运动或几何的直觉经验指导下的推断，从而日益显示出了罅隙和前后矛盾. 庞大而功效卓著的微积分体系，竟没有可资凭藉的坚实公理和严密逻辑，来确保自己命题的真确性，这严重的制约了它继续前进的步伐. 这一切都预示了微积分学的历史发展，需要实现一次革命性的飞跃，使自己成为像欧几里得几何那样的一种结构严整的公理体系，从微积分术上升为微积分学.

然而要把内容庞杂纷繁的微积分体系，建立成为结构严整的公理系统，无疑是一件困难而需要高度智慧的工作. 第一件当急之务就是重整微积分的理论系统. 这件工作在十九世纪中叶由著名数学家柯西(Cauchy，A. L.)等人加以完成了，因此今天我们常把数学分析的理论系统，称为柯西系统. 但是柯西并没有完成微积分的公理体系. 按照柯西的理论系统，微积分是建立在极限基础上的理论，而极限则必须要求所在的数域是连续的(或完备的). 严重的问题就在于人们所认识的数域(有理数域)是不连续的！我们不可能在有理数域上建立起微积分严密的理论体系. 这样人们就意识到了问题的本质：所谓微积分学的公理化问题，就是要解决困惑人们二千四百年的无理数的问题！

连续的数域(常称为实数域)能否成为一种实在？这个问题，也称为一维连续统问题. 这个问题的本质也就是无理数是否是一种代

数的实在,或无理数是否能被经验所承认的有理数所诠释?到了十九世纪下半叶,由于抽象数学的方法和思想的渐趋成熟,这个困惑了人们二千余年的问题,终于有了解决的途径.许多著名的数学家,如维尔斯特拉斯(Weierstrass,K)、梅莱(Méray,C.)、戴德金(Dedkind,R.)、康托(Cantor,G)等在十九世界末叶均致力于研究这个问题,并最后求得了完全的解决.一维连续统的漂亮理论,可谓是近代经典数学中一颗璀灿的明珠,它对二十世纪及今后数学的发展,有着不可估量的深远影响,是近代数学史上的一块史碑.

本书的第一章进述数系扩展的一般知识,以作为实数构造理论的前奏.本章内容通俗可懂,是每一个数学专业读者均应了解的起码常识.第二章讲述 Cantor 实数的构造,简明而有层次地论述一维连续统的理论.本章论述脉络清晰,逻辑严谨,从结构思想和方法上,有较大的启发性,对于认真研读的读者,将会受到很多裨益.本章的论证,事实上等于宣示了微积分学的公理,就是简单的 Peano 公理(自然数公理).但这一事实在书中并未形诸定理.本书的第三章介绍了实数的完备性(或连续性)的各种等价命题形式,以及紧集上连续映射的性质,这就构筑了整个微积分学的理论大厦坚实的科学基础.本章的学习对于掌握数学分析的理论系统的基础逻辑结构是十分重要的.本书第四章则主要论述了微积分理论的主体内容之一的 Riemann 积分的数学原理,其中包括 Riemann-Stieltjes 积分理论和原理.第五章讲述了在不同尺度下的多项式逼近的理论原理.第六章介绍了无理数中代数与超越数的基本知识.上面所列内容,均属于分析数学构造性理论中的基本常识,应当为每一从事数学与应用数学专业的读者所熟悉了解,但在通常的数学分析课程中,由于学时所限,常不能将它们列入讲授大

纲.本书的简明而适中的论述,将有助于读者比较容易地阅读并理解掌握这部分的内容,这对于他们在分析数学的宏观了解和后续学习上,将都是大有裨益的.

由于作者的水平与条件所限,本书中不当与差错在所难免,恳希得到国内同仁和广大读者的批评指正.

编　者

2003 年 5 月

目 录

第一章　数系的扩展

本章将论述数系扩展的理论和方法，以为实数构造的前奏．我们将首先论述数系扩展的始点 —— 自然数及其公理；同时分析数系的结构性质，包括代数结构、序结构以及拓扑结构等方面的性质，而数系拓展的目的和意义在于，我们可以从数系结构性质的完善上得到很好的了解；此外为了从基础的数系出发去表示出具有新的结构性质的扩展数系，并说明基础数系乃是新构造的数系的子系，我们还需要有等价分类和同构的概念．本章内容，对于数学与应用数学专业的读者，都属于基本常识．

§1　等价关系和分类

用等价关系对集合进行分类，并据此构造高一级的抽象集合，这种手法在理论数学中，特别在数的构造理论中，是十分重要和有用的．

定义 1.1　如果在集合 S 上，定义了一种关系“$\sim$”，它使得 S 中任两个元素 a 与 b，或具有这种关系，记为 $a \sim b$，或不具有这种关系，二者居一且仅居其一，并且满足如下三律：

(i) $\forall a \in S, a \sim a$　（自反律）

(ii) 若 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$（对称律）

(iii) 若 $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$（传递律）

则称上述关系“$\sim$”为 S 上的一个**等价关系**．

一个集合 S，若在其上定义了一种等价关系，则它的元素就可以按彼此是否等价去进行分类：若 $a \sim b$，则称 a、b 属于同一类，否

则就称a、b不属于同一类，凡与a属于同一类的一切元素所成的集合，称为以 a **为代表的等价类**，记为 S_a. S_a 中任何元素都可以称为 S_a 的一个代表. 显然，根据等价关系三律，即可推知

定理 1.1　一个集合 S 依据在其上定义的等价关系，可以唯一地分解成两两互不相交的等价类的并. 并且

$$S_a = S_b \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b.$$

[**例** 1.1]　集合S为平面上的三角形的全体，S上的关系"$\sim$"定义为两三角形相似. 则对于S中的任何两个三角形，相似或不相似两者必居且仅居其一. 此外，容易说明这个相似关系满足等价关系三律，因此它是 S 上的一个等价关系.

[**例** 1.2]　设Z为整数集，在Z上定义一种同余关系如下：m、n 为任两整数，若 $m-n$ 可被 2 整除，则称 m、n 为模 2 同余，记为 $m \equiv n(\mathrm{mod}2)$，或 $m-n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$. 今验证整数集上的模 2 同余关系是一个等价关系：

(i)　因 $m-m=0$ 可被 2 整除，故 $m \equiv m(\mathrm{mod}2)$.

(ii)　因 $n-m=-(m-n)$，故 $n-m$ 与 $m-n$ 有同样的可除性质，从而由 $m \equiv n(\mathrm{mod}2)$ 可推知 $n \equiv m(\mathrm{mod}2)$.

(iii)　若 $m \equiv n(\mathrm{mod}2)$，$n \equiv l(\mathrm{mod}2)$，则 $m-n$、$n-l$ 均可被 2 整除，由此知 $m-l=(m-n)+(n-l)$ 亦可被 2 整除，这说明了 $n \equiv l(\mathrm{mod}2)$.

所以整数集上的模 2 同余关系是一个等价关系. 于是由定理 1.1，我们可以得到两个等价类 —— 余数为 0 的同余类 S_0 和余数为 1 的同余类 S_1；

$$S_0 = \{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\} \quad (偶数类).$$

$$S_1 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\} \quad (奇数类).$$

同样我们可以在整数 Z 上定义模 3 的同余关系：$m \equiv n(\mathrm{mod}3)$，并且证明它是一种等价关系. 这种等价关系把 Z 分解成为互不相交的三个模 3 同余类：

$$S_0 = \{0, \pm 3, \pm 6, \cdots\}$$
$$S_1 = \{\pm 1, \pm 4, \pm 7, \cdots\}$$
$$S_2 = \{\pm 2, \pm 5, \pm 8, \cdots\}$$

同理，我们可以对任何自然数 p，定义整数集上模 p 的同余关系，并且证明它是整数集上的等价关系，根据模 p 的同余关系，即可将整数集分解成 p 个互不相交的同余类.

[例 1.3]　令 $N = \{1,2,\cdots\}$ 表示自然数集. 令 $D = \{(a,b) \mid a、b \in N\}$，它是由所有自然数偶组成的集合. 在 D 上定义等价关系"$\equiv$"如下：

$$(a,b) \equiv (c,d) \quad \text{意即 } b+c = a+d$$

可证上述定义的关系"$\equiv$"满足等价关系三律. 三律的(i)、(ii) 是显然的，今证(iii). 设$(a,b) \equiv (c,d)$，$(c,d) \equiv (e,f)$，则由定义知有 $a+d = b+c$，$c+f = d+e$. 将等式两端相加并运用加法消去律，即得 $a+f = b+e$，从而证明了$(a,b) \equiv (e,f)$.

下面以$\overline{(a,b)}$ 表示(a,b) 所属的等价类. 显然，当且仅当 $a+d = b+c$ 时，$\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$. 我们称$\overline{(a,b)}$ 为整数，这样我们在自然数集合上，通过定义一种等价关系，构造出整数集. 下节我们尚要讨论整数的运算和序.*

[例 1.4]　今 Z 表示整数的集合，考虑集合 $E = \{(a,b) \mid a, b \in Z, a \neq 0\}$，它是由一切满足 $a \neq 0$ 的整数偶(a,b) 所组成. 在 E 上定义等价关系"$\equiv$"如下

$$(a,b) \equiv (c,d) \quad \text{意即 } ad = bc$$

---

* D中的元素(a,b) 事实上是指 $b-a$. 等价关系$(5,3) \equiv (8,6)$ 实际上就是 $3-5 = 6-8$. 由于自然数中没有普遍的减法，而负数正是我们要定义的对象，因此不能用 $b-a$ 这个尚无意义的符号来表示欲构造的整数. 采用自然数偶(a,b) 来表示欲定义的整数，是一种逻辑上严格叙述的手法. 在下一节有理数的构造中，我们仍要采用这一办法.

如上定义的关系“$\equiv$”满足等价关系三律，其中的(i)、(ii)是显然的. 今证(iii)：由$(a,b)\equiv(c,d)$和$(c,d)\equiv(e,f)$，根据“$\equiv$”的定义，有$ad=bc$和$cf=de$. 前式乘e得$ade=bce$，又由$de=cf$，便得$acf=bce$，于是由$c\neq 0$并应用消去律，即得$af=be$，从而按定义，即得$(a,b)\equiv(e,f)$. 这就证明了关系“$\equiv$”是等价关系.

今以b/a表示(a,b)所属的等价类，称为**有理数**，其中b称为**分子**，a称为**分母**. 显然当且仅当$ad=bc$ $(a\neq 0, c\neq 0)$时，才有$b/a=d/c$. 下节将讨论由如上整数偶所构造的有理数的运算和序.

§2 代数运算和代数系

定义1.2 对于集合A来说，如果存在着一种法则，使得A中任意两个元素组成的序偶(a,b)，必唯一地对应于A中的一个元素c，则称在集合A内确定了一种**代数运算**. 一个集合，如果在它上面定义了适合某些规则的一种(或多于一种)代数运算，就称为是一个代数系.

在上述定义中，用“序偶”一词，是为了说明任何两个元素a、b，通过代数运算所对应的元素c，一般说来，是与a、b的次序有关的，即(a,b)与(b,a)作为不同的序偶，它们所对应的元素，未必是相同的.

例如有理数的集合是具有两种独立的代数运算——加法和乘法的代数系. 其它的数集合，如自然数集、整数集、实数集、复数集等，也都是具有这两种独立代数运算的代数系.

不要以为只有数的集合，才具有代数运算. 近代科学技术的语言，早已将实施代数运算的对象，远远超出了数的范围. 譬如力学中的力、速度、加速度；几何学中的矢量；代数学中的多项式、矩阵；分析学中的函数、算子、… 等，都是代数运算的对象.

[**例1.5**] 集合$A=\{a,b\}$，其中a、b代表两个动作：$a=$穿越马