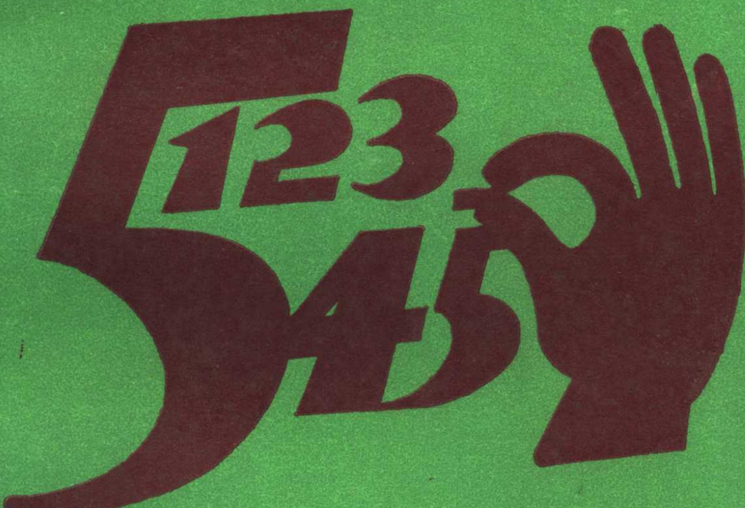
初中数学方法及其应用

刘志国　主编



重庆出版社

初中数学方法及其应用

刘志国　主编

重 庆 出 版 社

1991年·重庆

责任编辑 夏树人
封面设计 王 伟
技术设计 费晓瑜

刘志国 等编
初中数学方法及其应用

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新 华 书 店 经 销 重庆印制一厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张6.25 插页2 字数131千
1991年 9 月第一版 1991年 9 月第一版第一次印刷
印数：1—10,000
*
ISBN 7-5366-1564-7/G·526

定价：2.15元

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了现行初中数学教材中涉及的12种常用的数学方法，着重阐明了每种方法的背景、定义、理论依据及适用范围，并通过典型例题的剖析，使读者能较系统地掌握初中数学方法及其应用。为了让读者得到实践的机会，书中还精选了适量的训练题。

本书按12种方法分为12章。每章包括方法介绍、方法应用、方法训练三部分。方法介绍包括：引入方法；给出定义；揭示理论依据；指出地位和作用。方法应用包括：概述应用范围；分类例题示范；总结应用规律。方法训练力求：训练题体现有序性、阶梯性、典型性和启发性；突出重点，注意覆盖面；难易适度，份量适中。

本书知识性、实用性均强，可供初中学生、自学青年、中学教师参考使用。

前　言

中学数学教学改革的实践说明，在加强数学基础知识教学的过程中，重视数学方法的教学，是大面积提高初中数学教学质量的有效方法和重要途径。

数学知识、数学方法和数学能力之间有着密切的联系。数学知识和数学方法是构成数学基础知识的两个组成部分。数学方法以数学知识为基础，并寓于数学知识之中。数学方法又在某种意义上起着总结和发展数学知识的作用。而数学知识和数学方法的有机结合，正是数学能力形成的重要条件。因此，重视和加强数学方法的教学是十分必要的。

初中阶段的数学方法包括学科方法和逻辑方法两大类。学科方法主要有配方法、换元法、消元法、待定系数法、比较法、图象法、轴对称法、平移法、旋转法等；逻辑方法主要有综合法、分析法、反证法、同一法、演绎法、归纳法等。这些数学方法的出现，给整个数学的研究和发展带来了极大的方便。

无论哪一种数学方法，都有其严密的理论依据。例如，换元法是以“等量代换”为其理论依据；消元法是以“等量代换”和等式的基本性质为其理论依据；综合法、分析法、反证法是以形式逻辑基本规律中的同一律、充足理由律、矛盾律、排中律为其理论依据；等等。明确数学方法的理论背景，对正确理解和牢固掌握数学方法是大有裨益的。

对于常用的数学方法，要注意进行归纳和总结，使之系统化。为此，应着力弄清它的意义，明确它的理论依据，熟悉它的应用范围，总结它的应用规律．并通过实际应用，逐步提高运用的技巧和灵活运用的能力．只有这样，才能掌握数学方法，提高教学质量．

本书遵循“提炼、精选、通用”的原则，从现行初中数学教材中筛选了配方法、换元法、消元法、待定系数法、比较法、综合法、分析法、反证法、同一法、轴对称法、平移法、旋转法等十二种常用数学方法．对每一种方法，都根据其在初中数学中的地位和作用，采取了“当重则重，不重则轻”的处理办法．例如，对配方法、换元法、消元法、待定系数法、反证法等，由于它们的应用较广泛，因此对它们作了较系统的介绍；对比较法和同一法等，虽然在初中数学教材中已涉及到了，但由于它们在初中阶段实际应用很少，而在高中阶段又要经常用到，因此只对它们作了“引见”，试图起到“孕伏”的作用；对轴对称法、平移法和旋转法仅作了初步介绍，目的是为了渗透变换的思想，并揭示它们在解决平面几何问题中的特殊作用。

编　者

目录

第一章　配方法

初中代数第三册第117页“例1把$4x^2+8x-1$分解因式”，教材是这样解的：

解：方程$4x^2+8x-1=0$的根是

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}$$

$$=\frac{-8\pm4\sqrt{5}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2},$$

即　$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-2-\sqrt{5}}{2}$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad &4x^2+8x-1\\&=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)\\&=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

再看下面的解法：

$$\begin{aligned}\text{解：}\quad &4x^2+8x-1\\&=4x^2+8x+4-5\\&=(2x+2)^2-(\sqrt{5})^2\\&=(2x+2+\sqrt{5})(2x+2-\sqrt{5}).\end{aligned}$$

后面这种解法多么简捷！使用的是什么方法呢？这就是下面介绍的“配方法”。

【方法介绍】

将已知多项式经过拆项或添项，使之出现完全平方式，这种方法叫做**配方法**（注：也有配成完全立方式的，在初中常用的是配成完全平方）。这里有四种情况：一是已知两“数”的平方项，所缺的是中间项，即这两“数”乘积的2倍；二是已知一个“数”的平方，以及这个“数”与另一个“数”的乘积的2倍，所缺的是另一个“数”的平方；三是只有中间项，缺少两“数”的平方项；四是原式不需拆项或添项而直接配方的。

在配方时，要注意加（减）了哪一项，一定要减去（加上）相同的那一项，以使经过配方所得的式子与原式是恒等的。

配平方法的理论依据是完全平方公式：$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$。

配方法是一种重要而又基本的恒等变形的方法。它不仅在中学数学里有广泛的用途，就是高等数学里也要经常用到。配平方法对于解决如二次方程、二次不等式、二次函数和二次曲线等一系列具有二次特点的问题占有非常突出的地位。同时，对利用实数平方的非负性来解决有关问题也有很大的作用。

实数平方的重要性质有：

（1） $\sqrt{a^2}=|a|$。用于化去根号。

（2） 由$a^2=0$，得$a=0$。用于由二次式为零推出一次式为零。

（3） 由$a^2+b^2=0$，得$a=0$且$b=0$。用于“降次”、“为零”。

（4） $a^2\geqslant 0$，用于判断式子的符号。

（5） $a^2+m\geqslant m$或$-a^2+m\leqslant m$。用于求最值。

（6） 由$a^2\leqslant 0$，得$a=0$。用于由不等导出相等。

（7） 由$a^2+b^2\leqslant 0$，得$a=0$且$b=0$。用于由不等导出相等。

其中a、b、m均为实数。

下面，我们来谈谈配方法的一些应用。

【方法应用】

在初中数学中，配方法可用于分解因式、化简根式、解方程、求代数式的值、求一元二次方程的待定系数、判定一元二次方程有无实数根、证明等式或不等式和解二次函数有关的问题等。下面，我们分别举例说明。

1. 分解因式

分解因式有多种方法，除了教材中提到的提取公因式法、公式法、分组分解法和二次三项式的十字相乘法及求根法外，配方法也不失为一种重要方法，对于某些多项式，如果不能直接应用公式或分组来分解因式，但一经合理配方，就能十分顺利地达到目的。这样的多项式有两种情况：一是经过配方后便于用平方差公式分解因式的；二是可连续应用配方来分解因式的。

例1 把x^4+4y^4分解因式。

分析：由于x^4+4y^4是x^2与$2y^2$的平方和，因此，只要配上x^2与$2y^2$之积的2倍，就成为完全平方式。由此所得的式子，即可用平方差公式分解因式。

解：

$$\begin{aligned}&x^4+4y^4\\=&x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2\\=&(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2\\=&(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)\\=&(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2).\end{aligned}$$

说明：在本书中，如果未指明是在什么数的范围内分解因式，应认为是在有理数范围内。

例2 把$x^4+x^2-2ax+1-a^2$分解因式。

分析：原式若不添项，则无论怎样分组均不能达到因式分解的目的。注意到x^4+1是x^2与1的平方和，配上$2x^2$就成为完全平方式；$-2ax-a^2$添上括号，括号前面放上"－"，括号内就是$2ax+a^2$，再配上x^2就成为完全平方。仿上例即可分解因式。

解：

$$\begin{aligned}&x^4+x^2-2ax+1-a^2\\=&x^4+2x^2+1-x^2-2ax-a^2\\=&(x^2+1)^2-(x+a)^2\\=&(x^2+1+x+a)(x^2+1-x-a)\\=&(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1).\end{aligned}$$

例3 把x^2+2x-7在实数范围内分解因式。

分析：将x^2+2x配上1，就得到完全平方式。而8可写成$(\sqrt{8})^2$。

解：

$$\begin{aligned}&x^2+2x-7\\=&x^2+2x+1-8\end{aligned}$$

$$=(x+1)^2-(\sqrt{8})^2$$

$$=(x+1+2\sqrt{2})(x+1-2\sqrt{2}).$$

例4 把$4x^2+5x-1$在实数范围内分解因式。

分析：与上例比较，上例x的平方项的系数为1，本题x的平方项系数为4，故可先将原式提取公因式4，使括号内x的平方项的系数为1，这样便于配方。

解： $4x^2+5x-1$

$$=4\left(x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}\right)$$

$$=4\left[x^2+\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$

$$=4\left[\left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]$$

$$=4\left[\left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2\right]$$

$$=4\left(x+\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8}\right)\left(x+\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8}\right)$$

$$=\left(2x+\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(2x+\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right).$$

又解： $4x^2+5x-1$

$$=(2x)^2+5x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-1$$

$$=\left(2x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{16}$$

$$=\left(2x+\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}\right)\left(2x+\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{41}}{4}\right).$$

说明：后一种解法虽然比前一解法少些步骤，但不易找出应配的常数项。

例5 把x^8+y^8在实数范围内分解因式。

分析：把原式看成是x^4与y^4的平方和，只要配上$2x^4y^4$就成为完全平方式。由此得到的$(x^4+y^4+\sqrt{2}\,x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}\,x^2y^2)$，还可以继续应用配方法在实数范围内分解因式。

解：

$$
\begin{aligned}
&x^8+y^8\\
=&x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4\\
=&(x^4+y^4)^2-2x^4y^4\\
=&(x^4+y^4+\sqrt{2}\,x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}\,x^2y^2)\\
=&[x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2][x^4+2x^2y^2+y^4\\
&\quad-(2+\sqrt{2})x^2y^2]\\
=&[(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2][(x^2+y^2)^2\\
&\quad-(2+\sqrt{2})x^2y^2]\\
=&(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)\\
&\quad(x^2+y^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,xy)\\
&\quad\cdot(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy).
\end{aligned}
$$

2. 求$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根

要求$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根（即求$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$的值），也就是要找出两个数（如x、y），使它们的和等于a（即$x+y=a$），并且它们的积等于b（即$xy=b$），那么这两个数的算术平方根的和或差（即$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$）就是所要求的算术平方根。

例6 计算$\sqrt{19-8\sqrt{3}}$。

分析：可先将$8\sqrt{3}$化成$2\sqrt{48}$，然后把19写成16与3的

和。而16与3的积恰等于48，故$19-8\sqrt{3}$可以配成一个完全平方式。

解： $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

$=\sqrt{16-2\sqrt{16\times 3}+3}$

$=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}$

$=4-\sqrt{3}$。

说明：（1）被开方数必须符合$a\pm 2\sqrt{b}$的形式。如果$\sqrt{b}$的系数是2的倍数，可把$\sqrt{b}$前面的2以外的因数移到根号里面，使$\sqrt{b}$的系数变成2；（2）求$\sqrt{a-2\sqrt{b}}$时，两数中的大数的算术平方根应写在前面，小数的算术平方根应写在后面。

例7 计算$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$。

分析：注意到$\sqrt{3}$的系数是1，要配成$2\sqrt{3}$，应将$(2+\sqrt{3})$先乘以2再除以2，得$\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$。而分子$4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1$。
仿上例即可化简。

解： $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

说明：如果$\sqrt{b}$前面的系数是1，为了使$\sqrt{b}$的系数变成2，应把各项乘以2，整个式子再除以2。

例8 化简$\sqrt{2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}}$.

分析：先将x^2+5x+6分解因式，得$(x+3)(x+2)$。显然，$(x+3)+(x+2)=2x+5$，故$2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}$可以配成完全平方式。

解：
$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}}\\
&=\sqrt{x+3+2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\\
&=\sqrt{(\sqrt{x+3})^2+2\sqrt{(x+3)(x+2)}+(\sqrt{x+2})^2}\\
&=\sqrt{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})^2}\\
&=|\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}|\\
&=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}.
\end{aligned}$$

3. 解方程

用配方法可以解一元二次方程和某些二元二次方程，以及无理方程。对于一元二次方程，关键在于将方程左边配成完全平方式，右边为一常数，即可用直接开平方法求解；对于二元二次方程，关键在于将二元的项分别配成完全平方式，即可用实数的非负性求解；对于无理方程，关键在于求出形如$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根。

例9 解方程$3x^2=4x+2$.

分析：可将原方程变为“$3x^2-4x=2$”，再将方程左边配成一个完全平方式，即可进一步利用直接开平方法求解。

解：移项，得$3x^2-4x=2$.

两边都除以3，得 $x^2-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}$.

配方，得$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$,

即 $$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}.$$

∴ $$x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{10}，\text{或 } x-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}\sqrt{10}.$$

∴ $$x_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}，\ x_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10}.$$

例10 解方程$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}=5$.

分析：本例如果按解无理方程的一般方法来解，则困难很大。注意到 $x-3$是$\sqrt{x-3}$的平方，只要对原方程进行配方，便可找到解题的途径。

解：配方，得

$$\sqrt{x-3+2\sqrt{x-3}+1}+\sqrt{x-3+4\sqrt{x-3}+4}=5,$$

即 $\sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2}=5$.

∴ $\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+2=5$.

解得 $x=4$。经检验适合。

∴ 原方程的根是$x=4$。

说明：本例也可以综合应用换元法和配方法来求解。设$\sqrt{x-3}=y$，则$x=y^2+3$.经过配方，原方程变为$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2+4y+4}=5$，即$|y+1|+|y+4|=5$. 因为$y\geqslant 0$，所以$y+1+y+2=5$. 由此得$y=1$. 故$x=4$.

例11　若$x^2+2x+y^2-6y+10=0$，求实数x、y。

分析：一般来说，方程中未知数的个数与方程的个数相同时，组成方程组后才能求解。但根据定理“有限个非负实数的和为零，则每个非负实数必为零”（读者可用反证法加以证明），可以把原方程化成两个分别只含有一个未知数的方程，再分别求解即可达到目的。

解：配方，得$x^2+2x+1+y^2-6y+9=0$，

即　$(x+1)^2+(y-3)^2=0$。

$\therefore$　$(x+1)^2=0$，且$(y-3)^2=0$。

$\therefore$　$x=-1$且$y=3$。

4．求代数式的值

这类问题分两种情况：

（1）把已知条件配方

如果已知条件是一个多元方程时，经过配方，把已知条件变成几个实数平方的和等于零的形式，那么应用实数平方的性质，即可求出每个字母的值。这样，就便于求代数式的值了。

例12　已知x、y为实数，且$x^2+4x+y^2-10y+29=0$，求$3x^3-2y$的值。

分析：已知条件是一个特殊的二元二次方程，因此，可以用配方法求出x与y的值后，再代入$3x^3-2y$求值。

解：将$x^2+4x+y^2-10y+29=0$配方，得

$$x^2+4x+4+y^2-10y+25=0,$$

$$(x+2)^2+(y-5)^2=0.$$

$\therefore$　$(x+2)^2=0$，且$(y-5)^2=0$。