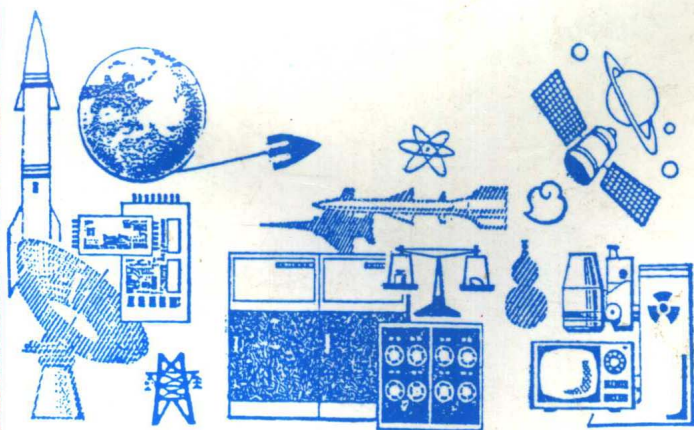


高等数学应用205例

主编 李心灿

副主编 姚金华 邵鸿飞



高等教育出版社

高等数学 应用 205 例

主 编	李心灿		
副主编	姚金华	邵鸿飞	
编 著	曾庆黎	王 强	王崇寿
	孙洪祥	李卫国	黄金坤
	郑 权	张建伟	杨奇峰

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用 205 例 / 李心灿编. —北京: 高等教育出版社, 1997

ISBN 7-04-005802-2

I. 高… II. 李… III. 高等数学-应用-范例 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 24894 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

高等教育出版社发行

中国青年出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.25 字数 310 000

1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月第 1 次印刷

印数 0 001 - 3 108

定价 11.90 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换

版权所有, 不得翻印

内 容 简 介

本书编选了 205 个高等数学应用实例. 这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的, 也有医学、航空航天、工程技术方面的, 还有经济、管理、日常生活方面的. 这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容, 不仅展示了高等数学在各学科领域的广泛应用, 而且也引导读者利用其知识和方法去观察、分析、解决实际问题.

本书既可以作为高等数学教学参考书, 也可以作为数学爱好者学习高等数学的补充读物.

前 言

数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识,还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力,让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物,用数学的思维方法分析、解决实际问题。

当代著名数学家、沃尔夫奖获得者 P. D. 拉克斯(Lax, Peter, D.)指出:“目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃,而且成就辉煌.但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其它科学的相互关系.这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的.纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始就做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程。”“在微积分里,学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉.最后,很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案.”数学家 C. 雷波特(Report, Cambridge)指出:“应该把数学内部及外部的应用都教给学生,使他对两个方面都明白:一是数学作为科学方法的效力,一是数学作为科学所应有的统一与美.在某种意义上,把数学的思考方式传递给我们智力工作的其余部分,就是数学的一个应用.”当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 H. 惠特尼(Whitney Hasselr)指出:“学数学意味着什么?当然是希望能用它,……最好的学习就是用,并且古今皆知仅在你有自己的想法时才有真正的学习.”著名数学教育家 H. 弗洛登塔尔(Freudenthel, Hans)指出:“数学源于现实,并且用于现实.”我很赞赏他们这些观点。

毋庸讳言,从知识的学习到知识的应用不是一件简单的、自然而然就能实现的事情,没有充分地、有意识地培养、训练和实践,没有表达应用观点的教学用书,学生的应用意识、兴趣和能力是不会

形成的,然而,目前国内大部分《高等数学》教学用书中的实例或习题,不仅应用面窄,局限于几何、物理居多;而且面孔陈旧,缺乏时代感。

为了在高等数学这一门重要基础课教学中,培养学生的应用意识、兴趣和能力,引导学生用所学的数学知识、方法去观察、分析、解决实际问题,北京数学会大学委员会经过讨论,认为很有必要编写一本高等数学应用实例的教学参考书,并责成我和姚金华同志负责组织北京有关高等院校的部分教师来编写。

经过有关院校的推荐和我们的邀请,参加编写此书的同志有:王强、王崇寿、孙洪祥、李卫国、李心灿、邵鸿飞、郑权、杨奇峰、姚金华、黄金坤、张建伟、曾庆黎,并由李心灿任主编、姚金华、邵鸿飞任副主编。

本书的编写过程是:先由正副主编总体构思设计,拟出编写要求、方案、计划,并提出一批主要可供参考的文献、书籍;通过全体编者认真讨论,分工阅读,又进一步收集了大量国内外的有关文献、书籍、教材,经过挑选或改编,共初选出了近400个实例;在此基础上,由正副主编主持在北京航空航天大学经过多次集体讨论,再由各编者分工进行修改;最后由正副主编初审、筛选、统稿、编排。

本书共汇集了205个应用实例。这些实例既有物理、力学、天文、化学、生物方面的;也有医学、航空航天、工程技术方面的;还有经济、管理、日常生活方面的。其中有不少实例贴近生活,贴近时代。这些实例所用到的数学知识覆盖了高等数学的主要内容,其中也溶进了各位编者的专业知识和教学经验。这些实例,展示了高等数学在各学科领域的广泛而又有趣的应用。其中,一些较简单的实例,将使学生受到初步数学模型构建的训练,提高解决实际问题的兴趣;一些较难的实例,将使学生见识如何从实际问题归纳成数学问题,进而解决问题。著名科学家爱因斯坦(Einstein, Albert)有句名言:“只有‘热爱’才是最好的老师。”我们认为应该使高等数

学成为一门“吸引”而不是“淘汰”学生的课程。

本书的编写是由北京数学会倡议的. 本书的出版得到了高等教育出版社的热忱支持, 得到了中国工业与应用数学学会理事长、清华大学萧树铁教授, 国家教委高等学校工科数学课程指导委员会主任、西安交通大学马知恩教授, 北京数学会副理事长, 北京理工大学叶其孝教授等的关心. 北京大学李正元教授、林源渠教授和叶其孝教授在百忙中认真审阅了书稿, 并提出了很多宝贵意见, 叶其孝教授还编写了书中的实例 145, 146, 147. 本书的责任编辑马志鹏先生在编辑、出版过程中作了大量工作, 在此一并致谢.

本书主要是根据书后所列的参考文献的有关内容编选而成. 我们一般只给出了一种解法, 其中有不少实例, 或许还有其它解法, 甚至有更好的解法. 由于我们的水平所限, 缺点, 不足和错误之处在所难免, 恳请读者批评指正.

李心灿

1995 年 9 月于北京航空航天大学

本书所用主要计量单位标准符号对照

公里	km	米	m
分米	dm	厘米	cm
毫米	mm	日	d
小时	h	分	min
秒	s	吨	t
公斤	kg	克	g
毫克	mg	升	L
毫升	ml	弧度	rad
1 卡 = 4.185J			
牛顿	N		

目 录

前言	i
1. 我国工薪人员应纳多少税	1
2. 外币兑换中的损失	2
3. 环境温度对人体代谢率的影响	3
4. 滑块的位置	4
5. 单三角脉冲的电压	5
6. 恒星的发光度	6
7. 利润与销量之间的函数关系	7
8. 蛛网模型	8
9. Fibonacci 数列与黄金分割问题	12
10. 连续复利与“e”	18
11. 细菌繁殖问题	21
12. 周期性静脉注射的一室模型	22
13. 产品利润中的极限问题	25
14. CO_2 的吸收	27
15. 利用逐次逼近方法求解开普勒方程	28
16. 你知道在分形几何中的 Koch 雪花吗	31
17. 巧分蛋糕	33
18. 抛物镜聚焦问题	35
19. 导数在经济学中的含义	36
20. 人在月球上能跳多高	39
21. 拉船靠岸问题	42
22. 陷波电路问题	43
23. 经济量的弹性问题	45
24. 航空摄影问题	49
25. 飞机的降落曲线	50
26. 飞机俯冲时机翼影子的速度	53

27. 人影移动的速率	54
28. 陨石的下落	55
29. 国会议席的估计	56
30. 怎样设计海报的版面既美观又经济	57
31. 接受能力与讲授时间的关系	58
32. 绝热过程中的压力变化速度	59
33. 垒球比赛时人眼的转动速度	60
34. 如何调整工人的人数而保证产量不变	61
35. 谁是竞选中的获胜者	64
36. 工人上班何时效率最高	65
37. 怎样在越野赛中取胜	66
38. 磁盘的最大存储量	70
39. 征税的学问	72
40. 以多大利率贷出贷款可获最大利润	74
41. 收入分布问题(劳伦兹曲线)	76
42. 如何定价使利润最大	77
43. 确定衬衫的售价使得获取利润最高	79
44. 电池的最佳组合	79
45. 水管能搬进水塔吗	81
46. 何处看塑像最好	83
47. 咳嗽问题的研究	84
48. 如何选择最优批量	86
49. 人在睡眠时气管中气流何时流速最大	88
50. 隧道的车流量问题	89
51. 青蛙能跳多高	90
52. 楼顶设置绝热层的投资效果	90
53. 酒瓶对酒厂利润的影响	91
54. 杂技新招	92
55. 哈哈镜的原理	94
56. 一年中哪一天白天最“长”	96
57. 您的书写灯应该挂多高	98
58. 鱼群的适度捕捞	99

59. 大衣柜能搬进新居吗	101
60. 心输出量	102
61. 为什么不宜制造太大的核弹头	103
62. 玻璃钢瓶还能用吗	105
63. 重力加速度问题	106
64. 钟表每天快多少	108
65. 如何计算储存在容器中苯的损失量	109
66. 石油的消耗量	112
67. 租客机还是买客机	112
68. 你会计算绕斜轴旋转而成的立体的体积吗	114
69. 学习曲线	119
70. 潜艇的观察窗问题	120
71. 垂直金属杆的长度问题	122
72. 如何求物体加热所需的热量	123
73. 怎样计算气体流经喷嘴的最快速度	124
74. 天然气产量的预测	127
75. 终身供应润滑油所需的数量	128
76. 如何标出椭圆柱油罐中油量的刻度	129
77. 如何用比较简便的方法计算椭圆周长	131
78. 地球环带的面积	133
79. 高尔夫球座的体积	134
80. 刚性棒的转动	135
81. 桶在海水中所受的压力	136
82. 大气压强问题	138
83. 转售机器的最佳时间	139
84. 力矩的功	140
85. 人口统计模型	142
86. 牙弓形状的数学模型	145
87. 单位时间内的血流量	146
88. 心脏输出量的测定	148
89. 呼出或吸入空气的速率	149
90. 估计某医院在某时间内的就医人数	150

91. 捕鱼成本的计算	151
92. 怎样计算均匀货币流的价值	152
93. 最大利润问题	154
94. 消费者剩余与生产者剩余问题	156
95. 最佳停产时间问题	161
96. 商品的贮存费需多少	162
97. 可否判定汽车起动和刹车时的加速度和减速度	163
98. 区间内平均温度可由两个固定时刻的平均温度决定	164
99. 高速公路出口处车辆平均行驶速度	166
100. 根据二维切片估计组织中小颗粒的数目	167
101. 半球面电极的接地电阻问题	168
102. 飞出火星去	169
103. 你知道物体的辐射能与温度之间的关系吗	170
104. 你知道质点滑落所需时间最少的路线吗	173
105. 算一下立交桥桥墩的体积	175
106. 根据库存量的函数估计保管费多少	177
107. 导弹跟踪飞机问题	177
108. 收音机怎样选择电台	180
109. 核废料的处理问题	183
110. 雪球融化问题	186
111. 马王堆一号墓年代的确定	188
112. 为什么用三级火箭发射人造卫星	190
113. 飞机减速伞的设计与应用	194
114. 惠更斯钟摆	196
115. 单摆可以用来作钟摆吗	200
116. 冰雹的下落速度	202
117. 陨石的质量	204
118. 马尔萨斯人口方程	205
119. 椭圆形办公室的声学特性	206
120. 化工车间的通风问题	208
121. 如何确定商品价格浮动的规律	210
122. 火箭的速度与高度是如何确定的	211

123. 液体旋转的角速度是如何确定的	213
124. 如何计算贮水槽的水位	216
125. 如何求物料干燥所需的时间	218
126. 能抓住走私船吗	221
127. 动物数量能够预测吗	223
128. 毛细管中的液体的流速是如何分布的	225
129. 如何建立固体物质的溶解速度常数的方程式	229
130. 血液的流速	231
131. 伯努利方程	233
132. 赤道上需多少颗通讯卫星	235
133. 反刍动物的食物通道	237
134. 恒速静脉滴注的一室模型	239
135. 主动脉压	241
136. 他是嫌疑犯吗	243
137. 游船上的传染病人数	244
138. 肿瘤生长的数学模型	245
139. 被食者—食者系统的 Volterra 模型	248
140. 布朗运动	251
141. 静脉输液问题	253
142. 逻辑斯蒂(Logistic)方程	254
143. 他的胰脏正常吗	256
144. 油井收入为多少	256
145. 湖泊体积及平均水深的估算	257
146. 如何控制体重	258
147. 我国人口会不会下降	260
148. 2000 年世界人口知多少	262
149. 最优化的产出水平	264
150. 蜂房问题	267
151. 在确定的预算下,劳动力与资本的最佳配置	271
152. 抵押贷款与分期付款购物分析	272
153. 火箭发射后地球对火箭引力减小的速率是多少	276
154. 怎样确定电视机的最优价格	277

155. 如何确定面膨胀系数	279
156. 如何才能使回收醋酸的效果最好	281
157. 你会求使旋转体的表面积最小的曲线吗	283
158. 尿素的清除率	285
159. 大气污染指数的影响因素	286
160. 广告的费用及其效应	287
161. 最大利润问题	290
162. 弦振动方程	291
163. 如何购物最满意	293
164. 鲑鱼问题	294
165. 替商店预测某个月加利福尼亚酒的销售量	295
166. 当商店卖两种牌子的冻果汁时,如何取得最大利润	296
167. 欧拉的四面体问题	296
168. 飞机的速度	299
169. 光线的反射	300
170. Kepler 定律与卫星的最大、最小速度	302
171. 超音速飞机与“马赫锥”	305
172. 刚体转动时速度的分布	307
173. 基因的“距离”	308
174. 通电线圈的磁转矩问题	310
175. 火山喷发后高度的变化	311
176. 飓风的能量有多大	312
177. 怎样计算水桶的最大容水量	313
178. 如何求通过孔口的流量	315
179. 泊萧叶公式	317
180. 刚体的转动惯量和刚体的绕轴运动	319
181. 用曲线积分证明 Kepler 第二定律	322
182. 摆线的等时性	325
183. 小岛在涨潮与落潮之间的面积变化	328
184. 通讯卫星的覆盖面积	329
185. 电荷移动做功	332
186. 分针与时针何时重合	333

187. 多波型信号发生仪中正弦波形逼近的优化设计	334
188. 矩形脉冲信号的频谱分析	339
189. e 是无理数的证明	341
190. p 进制无限循环小数怎样化成分数	342
191. 如何计划家庭教育基金	345
192. 药物在体内的残留量	346
193. 经济中的乘子效应	348
194. n 年后提取 n^2 元需存入多少钱	349
195. 齐诺悖论问题	351
196. 行星的顺向与逆向运动	353
197. 促进剂的配方问题	356
198. 如何测定太湖最深处	358
199. 蚂蚁如何逃跑	360
200. 溪流的流向	361
201. 火箭的运行速度	362
202. 第一宇宙速度	363
203. 炮弹在空中的运行问题	365
204. 沿什么方向电压变化最快	367
205. 星形线的一种形成方式	368
主要参考文献	371

1、我国工薪人员应纳多少税

根据中华人民共和国个人所得税法规定:个人工资,薪金所得应纳个人所得税.应纳税所得额的计算为:工资、薪金所得,以每月收入额减除费用八百元后的余额,为应纳税所得额.最后列出下面的税率表:

个人所得税税率表(工资,薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元到 2 000 元的部分	10
3	超过 2 000 元到 5 000 元的部分	15
4	超过 5 000 元到 20 000 元的部分	20
5	超过 20 000 元到 40 000 元的部分	25
6	超过 40 000 元到 60 000 元的部分	30
7	超过 60 000 元到 80 000 元的部分	35
8	超过 80 000 元到 100 000 元的部分	40
9	超过 100 000 元的部分	45

若某人的月工资,薪金所得为 x 元,请列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系.

解: 按税法规定当 $x \leq 800$ 元时,不必纳税, $\therefore$ 这时 $y = 0$.

当 $800 < x < 1\,300$ 元时,纳税部分是 $x - 800$,税率为 5%,

$$\therefore y = (x - 800) \cdot \frac{5}{100};$$

当 $1\,300 < x < 2\,800$ 元时,其中 800 元不纳税,500 元应纳 5% 的税,即 $500 \times \frac{5}{100} = 25$ (元).再多的部分,即 $x - 1\,300$ 按 10%

纳税. $\therefore$ 他应纳税款为 $y = 25 + (x - 1\,300) \cdot \frac{10}{100}$ (元). 依此可列出

下面的函数关系:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 800 \\ (x - 800) \cdot \frac{5}{100}, & 800 < x \leq 1\,300 \\ 25 + (x - 1\,300) \frac{10}{100}, & 1\,300 < x \leq 2\,800 \\ 25 + 150 + (x - 2\,800) \frac{15}{100}, & 2\,800 < x \leq 5\,800 \\ 175 + 450 + (x - 5\,800) \frac{20}{100}, & 5\,800 < x \leq 20\,800 \\ 625 + 3\,000 + (x - 20\,800) \frac{25}{100}, & 20\,800 < x \leq 40\,800 \\ 3\,625 + 5\,000 + (x - 40\,800) \frac{30}{100}, & 40\,800 < x \leq 60\,800 \\ 8\,625 + 6\,000 + (x - 60\,800) \frac{35}{100}, & 60\,800 < x \leq 80\,800 \\ 14\,625 + 7\,000 + (x - 80\,800) \frac{40}{100}, & 80\,800 < x \leq 100\,800 \\ 21\,625 + 8\,000 + (x - 100\,800) \frac{45}{100}, & x > 100\,800 \end{cases}$$

参考文献: [24].

2、外币兑换中的损失

某人从美国到加拿大去度假,他把美元兑换成加拿大元时,币面数值增加 12%,回国后他发现把加拿大元兑换成美元时,币面数值减少 12%.把这两个函数表示出来,并证明这两个函数不互为反函数,即经过这样一来一回的兑换后,他亏损了一些钱.

解: 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成的美元数,则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, \quad x \geq 0$$