（第二版）

SHUXUEFENXI

数学分析

下册

郭大钧　陈玉姝　裘卓明　编著

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

数 学 分 析

（第二版）

下 册

郭大钧　陈玉妹　裘卓明　编著

山东科学技术出版社

数学分析(第二版)

上、下册

郭大钧　陈玉妹　裘卓明　编著

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)2065109
网址：www lkj com cn
电子邮件：sdkj@jn-public sd cninfo net
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)2020432
印刷者：山东新华印刷厂德州厂
地址：德州市新华路 155 号
邮编：253006　电话：(0534)2621303

开本：850mm × 1168mm 1/32
印张：30.875
字数：600 千
版次：2002 年 8 月第 2 版第 4 次印刷
印数：19501－20500

ISBN 7－5331－2691－2　O·75
定价：(上、下册) 42 00 元

目　　录

第八章　级数 …………………………………………………… (467)
§1. 常数项级数 …………………………………………… (467)
§2. 函数项级数 …………………………………………… (494)
§3. 幂级数 ………………………………………………… (512)
补充题 ……………………………………………………… (535)
第九章　多元函数的微分学 …………………………………… (545)
§1. 多元函数的极限与连续 ………………………………… (545)
§2. 偏导数 ………………………………………………… (566)
§3. 全微分 ………………………………………………… (570)
§4. 复合函数的偏导数 ……………………………………… (578)
§5. 高阶偏导数与高阶全微分 ……………………………… (584)
§6. 泰勒公式 ……………………………………………… (593)
补充题 ……………………………………………………… (600)
第十章　多元函数微分学的应用 ……………………………… (605)
§1. 隐函数存在定理 ……………………………………… (605)
§2. 偏导数在几何上的应用 ………………………………… (629)
§3. 多元函数的极值 ……………………………………… (638)
§4. 条件极值 ……………………………………………… (648)
补充题 ……………………………………………………… (658)
第十一章　广义积分 ………………………………………… (661)
§1. 无穷积分 ……………………………………………… (661)
§2. 瑕积分 ………………………………………………… (677)
补充题 ……………………………………………………… (685)
第十二章　含参变量的积分 …………………………………… (688)

§1. 含参变量的定积分……………………………………………… (688)
§2. 含参变量的广义积分……………………………………………… (698)
§3. B—函数与 Γ—函数……………………………………………… (712)
补充题……………………………………………… (717)
第十三章　重积分……………………………………………… (722)
§1. 二重积分概念……………………………………………… (722)
§2. 二重积分的计算……………………………………………… (732)
§3. 二重积分的应用……………………………………………… (757)
§4. 三重积分……………………………………………… (771)
*§5. n 重积分……………………………………………… (790)
补充题……………………………………………… (799)
第十四章　线积分与面积分……………………………………………… (803)
§1. 线积分……………………………………………… (803)
§2. 线积分与路径无关的条件、格林公式……………………………………………… (820)
§3. 面积分……………………………………………… (831)
§4. 高斯公式与斯托克斯公式……………………………………………… (847)
补充题……………………………………………… (853)
第十五章　场论……………………………………………… (859)
§1. 等量面、方向导数、梯度……………………………………………… (860)
§2. 流量(通量)、散度……………………………………………… (869)
§3. 环量、旋度……………………………………………… (882)
补充题……………………………………………… (898)
第十六章　傅立叶级数……………………………………………… (900)
§1. 傅立叶级数……………………………………………… (900)
§2. 傅立叶积分……………………………………………… (924)
补充题……………………………………………… (936)
附录　幂级数的收敛半径公式……………………………………………… (939)
习题答案和提示……………………………………………… (941)

第八章　级　　数

某些应用问题以及函数的理论分析和近似计算都需要考虑无穷个数相加的问题,也就是级数的问题.

§1. 常数项级数

1.1　级数的定义和性质

设给定数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

符号

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{8.1-1}$$

叫做无穷级数,简称级数;a_n 叫级数的通项.级数(8.1-1)简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

定义 1　级数(8.1-1)前 n 项的和叫做它的部分和,记作 S_n: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在且有限(设为 S),则称级数(8.1-1)收敛,S 叫做它的和,记为

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

否则(即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在或为无穷大),则称级数(8.1-1)发散 .

例 1　试研究等比级数(亦称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 我们有

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$

两端乘 r,得

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

两式相减得

$$S_n - rS_n = a - ar^n.$$

故当 $r \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

又,显然,当 $r = 1$ 时,有

$$S_n = na.$$

由此可知.当 $|r| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$,故此时级数收敛,其和为$\dfrac{a}{1-r}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$;当 $|r| \geqslant 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ 或不存在,故级数发散.

例 2 试研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$，因此，级数收敛，且和为 1.

例 3 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

发散.

证 我们有

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 从而级数发散.

例 4 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

发散. 这是因为

$$S_{2n} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 0,$$

$$S_{2n+1} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+2}$$
$$= 1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ 不存在.

下面简述一下级数的基本性质.

性质 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ (C 是常数)也收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = C\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

证 用 S_n^* 表级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ 的部分和，则 $S_n^* = CS_n$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}$

$S_n^* = CS$.证完．

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

证明留作习题(见后习题一第 2 题).

性质 3 不改变收敛级数各项的顺序，而对其项任意加括号所构成的新级数，必仍收敛，并且其和不变，也就是说，若级数(8.1－1)收敛，其和为 S，则级数

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots \tag{8.1-2}$$

也收敛，并且其和也是 S. 换句话说，收敛级数具有可结合性.

证 用 S_n、S_n^* 分别表示级数(8.1－1)、(8.1－2)的部分和，则有 $S_n^* = S_{k_n}$，即序列 S_n^* 是序列 S_n 的一子序列，故由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在有限可知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*$ 存在有限，并且

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} S_{k_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

注 反过来，若一个级数加括号后的新级数收敛，则不能推出原级数收敛. 例如，级数

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots + [1 + (-1)] + \cdots$$

收敛(其和为零)，但级数

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1) + \cdots$$

发散.

性质 4 在一个收敛(发散)级数前面加上或去掉有限项，所得级数仍收敛(发散).

证 只需证去掉有限项的情形. 设级数(8.1-1)的部分和是 S_n, 从级数(8.1-1)去掉前 m 项后所得级数为:

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+n}+\cdots \tag{8.1-3}$$

显然, 其部分和 S_n^* 为

$$S_n^* = a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+n} = S_{m+n}-S_m,$$

由此可知, 级数(8.1-1)和级数(8.1-3)或同时收敛, 或同时发散.

性质 5 若级数(8.1-1)收敛, 则必

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{8.1-4}$$

证 我们有

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

若级数收敛, 则必

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

注 由性质 5 知, 若级数的通项不趋于零, 则此级数发散. 这是判断级数发散的一个常用办法. 例如, 例 1 中的等比级数, 当 $|r|\geqslant 1$ 时, 其通项 ar^{n-1} 不趋于零, 故发散.

另外, 还应注意, 通项趋于零只是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件; 换句话说, 通项趋于零的级数可能发散. 例如, 例 3 中的级数, 其通项趋于零, 但它发散.

在结束本节之前, 我们要指出, 按收敛的定义, 研究级数(8.1-1)的收敛性及其和 S 的问题, 就是研究数列 $\{S_n\}$(S_n 是部分和)及其极限的问题; 反之, 设给定数列 $\{u_n\}$, 令

$$a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \cdots, a_n = u_n - u_{n-1}, \cdots$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = u_n,$$

故研究数列$\{u_n\}$及其极限的问题就相当于研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的收敛性及其和的问题.由此可知:研究级数与其和与研究数列及极限是等价的,只是表现形式不同而已,两者可以互相转化。

习 题 一

1.试把下列级数缩写成求和的形式,并判断其敛散性,若收敛并求其和:

(1)$\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\cdots$;

(2)$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots+$;

(3)$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(4)$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

2.试证明性质 2.

3.试再举出一个通项趋于零的发散级数.

4.求级数$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$的和.

1.2 正项级数

定义 2 若$a_n \geqslant 0(n=1,2,3\cdots)$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数.

正项级数最简单,也最重要.以后就知道,许多任意项级数的问题都可归结为正项级数的问题.

基本定理 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是其部分和

S_n 有上界，即存在常数 $M>0$，使 $S_n \leqslant M(n=1,2,3\cdots)$.

证 由于 $a_n \geqslant 0(n=1,2,3\cdots)$，故其部分和序列 S_n 是单调增大的：

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots.$$

因此，根据第二章§2定理8知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是有限的充要条件是 S_n 有上界．证完.

上述定理是基础，但具体判断级数的敛散性则需根据它来建立一些实用的判别法.

比较判别法 设给定两个正项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (8.1-5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (8.1-6)$$

如果

$$a_n \leqslant b_n \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (8.1-7)$$

则：

(1)从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2)从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证 用 S_n、S_n^* 分别表级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和，根据(8 1-7)知

$$S_n \leqslant S_n^* (n = 1,2,3,\cdots)$$

因此，从 S_n^* 有上界可知 S_n 有上界，从 S_n 无上界可知 S_n^* 无上界，故由基本定理即获证.

注 由于去掉一个级数前面的有限项不改变其敛散性(性

质4)，故知：若将条件(8.1－7)换为“存在正整数 N，使当 $n>N$ 时有 $a_n\leqslant b_n$”，比较判别法的结论仍成立．

例5 考察 p－级数($p>0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \qquad (8.1-8)$$

试证：当 $p>1$ 时级数(8.1－8)收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，它发散.

证 (1) 设 $p>1$，依次将级数(8.1－8)的一项、两项、四项、八项、…括在一起，得

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots \qquad (8.1-9)$$

它的各项显然小于等于级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots \qquad (8.1-10)$$

对应的各项，而后一级数(8.1－10)是等比级数，公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故收敛.根据比较判别法知级数(8.1－9)收敛，从而去掉括弧的级数(8.1－8)也收敛(见后习题二第1题).

(2)设 $p=1$，这时，级数(8.1－8)是调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad (8.1-11)$$

依次把级数(8.1－11)的一项、两项、四项、八项…括在一起，得级数：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \qquad (8.1-12)$$

级数(8.1－12)的各项分别大于等于级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \qquad (8.1-13)$$

对应的项，而级数(8.1－13)发散.故由比较判别法知级数(8.1－12)发散，从而级数(8.1－11)发散.

(3)设 $p<1$，由于这时级数(8.1－8)的各项分别大于等于调和级数(8.1－11)的对应项

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

故由级数(8.1－11)的发散性，应用比较判级法知级数(8.1－8)发散.

下面是比较判别法的极限形式，在实用上更方便.

比较判别法(极限形式) 设给定两个正项级数(8.1－5)和(8.1－6)，又设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\rho \quad (0\leqslant\rho\leqslant+\infty) \qquad (8.1-14)$$

那末，

(1)若 $0<\rho<+\infty$，则级数(8.1－5)和(8.1－6)必或同为收敛，或同为发散；

(2)若 $\rho=0$，则从(8.1－6)收敛可推出(8.1－5)收敛；

(3)若 $\rho=+\infty$，则从(8.1－6)发散可推出(8.1－5)发散.

证

(1) 设 $0<\rho<+\infty$.取一正数 ε_0 充分小，使 $\rho-\varepsilon_0>0$，于是，由(8.1－14)知：存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒 $\rho-\varepsilon_0<\frac{a_n}{b_n}<\rho+\varepsilon_0$ 有，即 $(\rho-\varepsilon_0)b_n<a_n<(\rho+\varepsilon_0)b_n$. 由此，根据比较

判别法(及其后的注),知(8.1 - 5)和(8.1 - 6)同为收敛,或同为发散.

(2)、(3)的证明留作习题(见后习题二第2题).

例6 试判断下列级数是收敛还是发散.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$;

解 (1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散(它是 $p=\frac{1}{2}$ 时的 p - 级数),故由比较判别法(极限形式)知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ 发散.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n=0$$

$\left[\text{因为 } n>3 \text{ 时}, \left(\frac{2}{n}\right)^n<\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$,故由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

习 题 二

1 试证:对于正项级数而言,级数的性质3的逆命题成立,即:假定 $a_n\geqslant 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$,若其加括弧的级数(8 1 - 2)收敛,则去掉括弧的级数

(8.1-1)也必收敛,且其和不变.

2.试证比较判别法(极限形式)的结论(2)与(3).

3 试判断下列级数的敛散性:

(1) $\frac{1}{5+1^2}+\frac{1}{5+2^2}+\frac{1}{5+3^2}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^4+1)}}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$　$(a>0)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$;　　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

(6) $1+r\cos^2\theta+r^2\cos^2 2\theta+r^3\cos^2 3\theta+\cdots$　$(0<r<1)$;

(7) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$;　　(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$　$(x>0)$;

将 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(0<r<1)$ 相比较,可得下面两个应用上常用的判别法(比值判别法、根值判别法).

达朗倍尔(J.d'Alembert)判别法　对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\qquad(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)\qquad(8.1-15)$$

则当 $\rho<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;$\rho>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证　(1) 设 $\rho<1$,取一充分小的正数 ε_0,使 $\rho+\varepsilon_0=r<1$,于是,由(8.1-15)知,存在正整数 N,使当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon_0=r.$$

故

$$a_{N+1} < ra_N,\ a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N,$$
$$a_{N+3} < ra_{N+2} < r^3 a_N, \cdots.$$

即级数

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots \qquad (8.1-16)$$

的各项比收敛等比级数

$$a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 + \cdots$$

的对应项小,故由比较判别法知,级数(8.1－16)收敛,再根据级数的性质 4 知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 设 $\rho > 1$,取一正数 ε^* 充分小,使 $\rho - \varepsilon^* > 1$,由(8.1－15)知,存在正整数 N,使当 $n > N$ 时,有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho - \varepsilon^* > 1, \text{故 } a_{n+1} > a_n \quad (n > N \text{ 时}),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$,,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 7 试讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n} = \frac{1}{a} + \frac{2!}{a^2} + \frac{3!}{a^3} + \cdots + \frac{n!}{a^n} + \cdots \quad (a > 0)$.

解 (1)我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

故级数收敛.

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a} = +\infty,$$