高等数学

上册 GAODENG SHUXUE

张朝阳 李德新 编

GAODENG SHUXUE

厦门大学出版社

高等数学

上册

GAODENG SHUXUE

张朝阳 李德新 编

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/张朝阳,李德新编. —厦门:厦门大学出版社,2003.8

ISBN 7-5615-2086-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059549 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

http://www.xmupress.com

xmup @ public.xm.fj.cn

三明地质印刷厂印刷

2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:13 插页:2

字数:326 千字 印数:1-7 200 册

定价:24.00 元

前　言

由于现代科学技术特别是电子计算机技术的迅猛发展，数学在各个领域中的应用日趋普遍.数学成了学习每门现代科学技术都必须掌握的通用语言，而以数学思维为代表的清晰周密的思辩推断的能力，更是做好任何工作都必不可缺的基本素质.

为了适应高等教育、高等院校向综合性或多科性发展的时代要求，我们根据高等数学课程自身的特点，结合同仁们多年教学实践和长期交流合作的基础上编写了这套《高等数学》(上、下册)教材.

在确保农、林、医、经、管、文、工等专业数学课程教学基本要求的前提下，本书对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明，详略适当，同时突出了微积分基本思想在农、经、工以及生命科学中的应用，可作为非数学专业本科生的公共教材，也可供科技人员参考.

本书共 12 章，分上、下两册，上册 7 章，下册 5 章.每节后附有习题，每章后另附有总习题.总习题分 A、B 两组，A 组是客观题，是基本题，含填空题和选择题等；B 组是主观题，是提高题，含计算、证明、应用题.习题量丰富，题型覆盖面广，有利于各种门类不同教学要求的筛选使用.

本书由张朝阳、李德新编写.张朝阳负责第二、三、四、五、六、七、十二章的编写和上册的统稿.李德新负责第一、八、九、十、十一章的编写和下册的统稿.

陈同英教授，林文浩、姜永、温永仙副教授为本书编写付梓提供了许多宝贵意见和建议，在此谨表诚挚的谢意.

编者才学疏浅，书中不足之处在所难免.敬请使用本书的教师和读者们不吝评正.

编　者
2003年6月

目　录

前　言
第一章　极限与连续 …… (1)
§1.1　函数 …… (1)
一、函数的概念 …… (1)
二、基本初等函数 …… (4)
三、复合函数、初等函数 …… (8)
习题 1.1 …… (9)
§1.2　数列的极限 …… (12)
习题 1.2 …… (16)
§1.3　函数的极限 …… (16)
一、$x\to\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限 …… (17)
二、$x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限 …… (18)
三、函数极限的几个重要性质 …… (22)
习题 1.3 …… (24)
§1.4　无穷小与无穷大 …… (25)
一、无穷小 …… (25)
二、无穷小的性质 …… (26)
三、无穷大 …… (28)
习题 1.4 …… (29)
§1.5　极限运算法则 …… (30)
习题 1.5 …… (34)
§1.6　两个重要极限 …… (36)

一、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1(\frac{0}{0})$ …… (36)
二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ …… (38)
习题 1.6 …… (39)
§1.7 无穷小的比较 …… (40)
习题 1.7 …… (43)
§1.8 函数的连续性 …… (44)
一、函数的连续性 …… (44)
二、函数的间断点 …… (47)
习题 1.8 …… (49)
§1.9 连续函数的运算、初等函数的连续性 …… (50)
一、连续函数的运算 …… (50)
二、初等函数的连续性 …… (51)
习题 1.9 …… (52)
§1.10 闭区间上连续函数的性质 …… (53)
习题 1.10 …… (56)
总习题一 …… (56)
第二章 导数与微分 …… (63)
§2.1 导数的概念 …… (63)
一、引例 …… (63)
二、导数的定义 …… (66)
三、求导数举例 …… (67)
四、导数的几何意义 …… (70)
五、函数的可导性与连续性之间的关系 …… (71)
习题 2.1 …… (73)
§2.2 求导法则 …… (75)
一、导数的四则运算法则 …… (75)
二、复合函数的求导法则 …… (78)
三、反函数的求导法则 …… (81)

习题 2.2 …… (87)
§2.3 高阶导数 …… (89)
习题 2.3 …… (92)
§2.4 隐函数与参数方程确定的函数的导数 …… (93)
一、隐函数的导数 …… (93)
二、由参数方程所确定的函数的导数 …… (96)
习题 2.4 …… (100)
§2.5 函数的微分 …… (101)
一、微分的概念 …… (101)
二、微分的基本公式及运算法则 …… (106)
三、微分的应用 …… (108)
习题 2.5 …… (112)
总习题二 …… (114)
第三章 微分学的基本定理和导数的应用 …… (121)
§3.1 中值定理 …… (121)
一、罗尔(Rolle)定理 …… (121)
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 …… (123)
三、柯西(Cauchy)中值定理 …… (126)
习题 3.1 …… (128)
§3.2 罗必塔法则 …… (129)
一、$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式极限 …… (129)
二、其他类型未定式的极限 …… (132)
习题 3.2 …… (135)
§3.3 泰勒公式 …… (136)
一、泰勒(Taylor)公式 …… (136)
二、马克劳林(Maclaurin)公式 …… (138)
习题 3.3 …… (141)
§3.4 函数的单调性与极值 …… (142)

一、函数单调性的判别法 …………………………………… (142)
二、函数的极值 ………………………………………………… (146)
三、最大值与最小值 ………………………………………… (150)
习题 3.4 ……………………………………………………………… (154)
§3.5　函数图形的描绘 ………………………………………… (157)
一、曲线的凹向和拐点 ……………………………………… (157)
二、曲线的渐近线 …………………………………………… (160)
三、描绘函数图形的一般步骤 …………………………… (162)
习题 3.5 ……………………………………………………………… (164)
§3.6　曲率 …………………………………………………………… (165)
一、弧微分 ………………………………………………………… (165)
二、曲率及其计算公式 ……………………………………… (166)
三、曲率圆与曲率半径 ……………………………………… (170)
习题 3.6 ……………………………………………………………… (172)
总习题三……………………………………………………………… (173)
第四章　不定积分……………………………………………… (180)
§4.1　不定积分的概念及其性质 …………………………… (180)
一、原函数和不定积分的概念 …………………………… (180)
二、不定积分的基本性质 ………………………………… (183)
三、基本积分公式 …………………………………………… (184)
习题 4.1 ……………………………………………………………… (186)
§4.2 换元积分法……………………………………………………… (187)
一、第一换元法 ………………………………………………… (187)
二、第二换元法 ………………………………………………… (195)
习题 4.2 ……………………………………………………………… (202)
§4.3　分部积分法 ………………………………………………… (204)
习题 4.3 ……………………………………………………………… (209)
§4.4　几种特殊类型函数的积分举例 ……………………… (210)
一、有理函数的积分 ………………………………………… (210)

二、三角函数有理式的积分 …………………………………… (216)
三、简单无理式的积分 ………………………………………… (218)
习题 4.4 ………………………………………………………… (220)
总习题四………………………………………………………… (222)
第五章 定积分…………………………………………………… (226)
§5.1 定积分的概念 ……………………………………………… (226)
一、实践中的定积分问题 …………………………………… (226)
二、定积分定义 ………………………………………………… (230)
习题 5.1 ………………………………………………………… (234)
§5.2 定积分的性质 ……………………………………………… (234)
习题 5.2 ………………………………………………………… (238)
§5.3 微积分基本公式 …………………………………………… (239)
一、积分上限的函数及其导数 ……………………………… (240)
二、牛顿-莱布尼兹公式……………………………………… (242)
习题 5.3 ………………………………………………………… (247)
§5.4 定积分的换元法与分部积分法 ………………………… (249)
一、定积分的换元法 ………………………………………… (249)
二、定积分的分部积分法 …………………………………… (253)
习题 5.4 ………………………………………………………… (256)
§5.5 广义积分 …………………………………………………… (259)
一、无限区间上的广义积分 ………………………………… (259)
二、有无穷间断点的广义积分 ……………………………… (263)
三、Γ 函数与 β 函数 ………………………………………… (265)
习题 5.5 ………………………………………………………… (267)
总习题五………………………………………………………… (269)
第六章 定积分的应用…………………………………………… (274)
§6.1 定积分的元素法 …………………………………………… (274)
§6.2 平面图形的面积 …………………………………………… (276)
一、直角坐标情形 …………………………………………… (276)

二、极坐标情形 …………………………………………………… (280)
习题 6.2 ……………………………………………………………… (281)
§6.3　体积 ………………………………………………………… (283)
一、平行截面面积为已知的立体的体积 ………………………… (283)
二、旋转体的体积 …………………………………………………… (284)
习题 6.3 ……………………………………………………………… (286)
§6.4　平面曲线的弧长 ………………………………………… (287)
习题 6.4 ……………………………………………………………… (289)
§6.5　功、液体静压力和引力………………………………… (290)
一、变力沿直线做功 ………………………………………………… (290)
二、液体静压力 ……………………………………………………… (292)
三、引力 ……………………………………………………………… (293)
习题 6.5 ……………………………………………………………… (294)
§6.6　经济应用举例 …………………………………………… (296)
习题 6.6 ……………………………………………………………… (296)
总习题六……………………………………………………………… (297)
第七章　微分方程………………………………………………… (301)
§7.1　微分方程的基本概念 …………………………………… (301)
习题 7.1 ……………………………………………………………… (305)
§7.2　一阶微分方程 …………………………………………… (305)
一、可分离变量的微分方程 ………………………………………… (305)
二、一阶齐次微分方程 ……………………………………………… (310)
习题 7.2 ……………………………………………………………… (311)
§7.3　一阶线性微分方程 ……………………………………… (313)
习题 7.3 ……………………………………………………………… (318)
§7.4　一阶微分方程的应用 …………………………………… (318)
习题 7.4 ……………………………………………………………… (328)
§7.5　可降阶的二阶微分方程 ………………………………… (330)
一、$y^{(n)}=f(x)$型 ………………………………………………… (330)

二、$y''=f(x,y')$型 …………………………………………… (331)
三、$y''=f(y,y')$型 …………………………………………… (332)
习题 7.5 …………………………………………………………… (335)
§7.6　二阶常系数微分方程 ………………………………… (335)
一、二阶常系数齐次线性微分方程 …………………………… (336)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程 ………………………… (340)
习题 7.6 …………………………………………………………… (347)
总习题七…………………………………………………………… (348)
习题答案…………………………………………………………… (353)
附录Ⅰ …………………………………………………………… (386)
附录Ⅱ …………………………………………………………… (391)
参考书目…………………………………………………………… (404)

第一章　极限与连续

函数、极限都是高等数学中最基本的概念，也是微积分学的基础. 在中学数学里，对函数概念及其性质已有较详细的讨论，本章将在复习函数概念的基础上，着重介绍函数的极限和连续性.

§1.1　函　数

一、函数的概念

客观世界有许多变量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定性关系，在数学上就称为函数关系.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$；数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 称为自变量，y 称为因变量.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的值与它相对应，则称函数在 x_0 有定义，且记 x_0 处的函数值为 $f(x_0)$、$y|_{x=x_0}$ 或 $y=y_0$. 所以函数的定义域就是使函数有定义的 x 值全体，而相应的函数值全体就称为函数的**值域**，表示为

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

以后我们还会经常用到函数 $y=f(x)$ 在 x_0 邻域，或 x_0 的去心

邻域有定义的概念. 所谓 x_0 的 δ 邻域是指数集

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\},$$

这里 δ 一般是指某一较小的正数. 于是上述邻域就是以 x_0 为中心, $\delta>0$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 在数轴上, 它表示与点 x_0 距离小于 δ 的一切点 x 全体(见图 1-1). 如果把点 x_0 从上述区间内挖去, 则这种挖去点 x_0 的开区间就是点 x_0 的 δ **去心邻域**, 它是数集

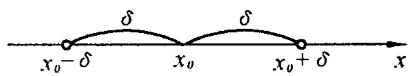


图 1-1

$$U(\hat{x}_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

于是函数 $f(x)$ 在 x_0 的 δ 邻域有定义, 就是指它在数集 $U(x_0,\delta)$ 上处处有定义.

函数的定义域常用区间来表示. 例如, 步行时, 对应于步行速度 x(米/秒), 人体的能量消耗

$$E=155x^2-65x+160, 0.5\leqslant x\leqslant 2.5,$$

式中 E 的单位是瓦特. 该函数的定义域是闭区间 $[0.5, 2.5]$.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而只是抽象地研究用算式表达的函数, 这时我们约定: 函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如, 在不考虑实际意义时, 函数

$$E=155x^2-65x+160$$

的定义域是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$; 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

自变量与因变量的对应法则通常用表格、图像和解析式来表示. 应当指出, 在实际应用中, 用解析式来表示函数时, 有的函数在其定义域上不能用一个统一的公式来表示. 例如, 根据测定, 人在跑步时, 与跑步速度 x 对应的能量消耗的数学模型为 $E=250x+100$,

$x>2.5$. 于是，要描述人体运动（包括步行和跑步）速度 x 与能量 E 消耗的函数关系，就需要用下述函数来表示

$$E=\begin{cases}155x^2-65x+160, & 0.5\leqslant x\leqslant 2.5\\ 250x+100, & x>2.5\end{cases}.$$

图 1-2 给出它的图像. 与此相同，在自变量的不同范围用不同的解析式来表示自变量与因变量之间的对应法则的一个函数称为分段函数.

例 1　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & 当\ x>1\end{cases}$$

也是一分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty)$. 当自变量取闭区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值 y 由公式 $y=2\sqrt{x}$ 所确定；当 x 取开区间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，y 由公式 $y=1+x$ 确定. 例如：$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in[1,+\infty]$，所以 $f(3)=1+3=4$. 这函数的图形如图 1-3 所示.

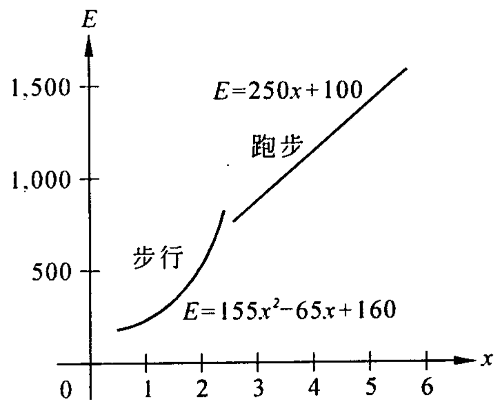


图 1-2

例 2　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作 $[x]$，例如 $[\frac{5}{7}]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看成变量，则函数

$$f(x)=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 W 为全体整数. 它的图形如图 1-4

所示，此图形称为阶梯曲线. 函数 $f(x)=[x]$ 也是分段函数，称为**取整函数**.

以上我们略为详细讨论的定义域和对应法则正是函数关系中的两个要素. 两个函数若具有相同的定义域和对应法则，则称它们是等同的.

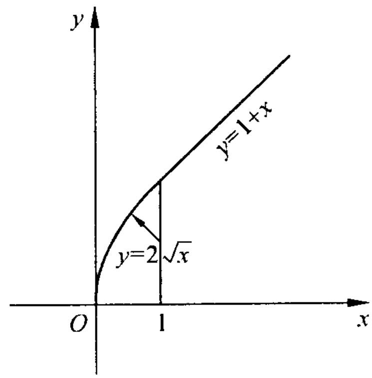


图 1-3

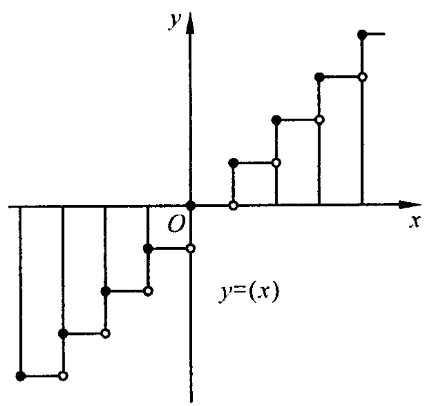
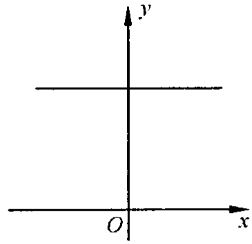
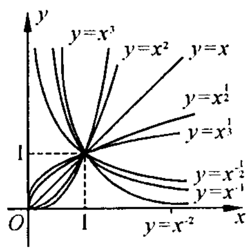
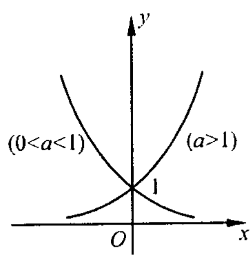
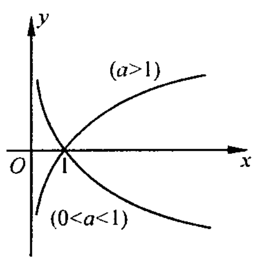


图 1-4

二、基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常数函数. 在中学数学里，对这些函数的定义域、图形以及有界性、单调性、奇偶性和周期性等几种特性都作过较为详细的介绍，这里不再赘述，仅将它们的图形和简单性质列表于下供查阅和复习(表 1-1).

表 1-1

名称	表达式	定义域	图形	特性
常数函数	$y=c$	$(-\infty,+\infty)$		
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq0)$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有定义.		经过点(1,1). 在第一象限内当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 为增函数；$\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 为减函数.
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方（因 $a^x>0$），且都通过点(0,1). 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数.
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq1)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧（因 0 与负数都没有对数），都通过点(1,0). 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减数；当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数.