现代金融理论前沿丛书 周爱民 主编

金融计量学

周爱民 徐 辉 田翠杰 等著

Jinrong Jiliangxue

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

现代金融理论前沿丛书　　周爱民　主编

金融计量学

周爱民　徐辉　田翠杰　等著

经济管理出版社

图书在版编目（CIP）数据

金融计量学/周爱民等著．—北京：经济管理出版社，2005
ISBN 7-80207-380-4

Ⅰ．金… Ⅱ．周… Ⅲ．金融—计量经济学
Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 111940 号

出版发行：经济管理出版社
北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 11 层
电话：（010）51915602 邮编：100038

印刷：北京银祥印刷厂 经销：新华书店

选题策划：谭 伟
责任编辑：郭丽娟
技术编辑：蒋 方
责任校对：郭红生

787mm×1092mm/16 22 印张 492 千字
2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册 定价：38.00 元
书号：ISBN 7-80207-380-4/F·364

编者的话

金融业是国民经济的关键行业，而金融学是经济学中的一个重要学科分支。在国外，金融系越办越大，经济系越办越小。于是，有人开始说金融的概念已经超越了经济的概念。现在的确是有这样一种倾向，由于金融学的实用性要比经济学大得多，所以，喜欢学习金融学的学生越来越多；同时经济学的课堂上由于数学讲得越来越多而越来越不吸引人。这就是为什么国外许多金融专业开在商学院的原因，也是为什么中国学生申请美国大学经济学的奖学金要比申请金融学的奖学金容易得多的原因。

经济学越来越理论化了，但这绝不等于说金融学越来越不理论化。事实上，现代金融理论所用到的数学工具不比经济学的任何一门学科分支所用到的数学工具少。而且从金融学与经济学的关系上来说，金融学早期的发展的确滞后于经济学的发展，但金融学近期的发展则走在了经济学发展的最前沿。

1776 年是现代经济学开始发端的年份，这是大家一致公认的事实。那一年，一个叫亚当·斯密（Adam Smith，1723～1790）的英国人写出了具有现代意义的第一本经济学著作《国富论》(An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations)，从而被推崇为古典经济学派的创立者。而现代金融理论则是从 20 世纪 50 年代开始发端的，这几乎要比现代经济学的诞生晚了 200 年。

1838 年是经济学历史上第二个重要年份，在这一年一位名叫安东尼· 奥古斯丁·古诺（Antoine Augustin Cournot，1801～1877）的法国数学家出版了他的第二本学术著作《财富理论的数学原理之研究》①（Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses)，从此开创了在经济学研究中始终占主流地位的数理经济学派。数理经济学派对现代经济学研究的推动是有目共睹的，一门科学只有当它能成功地运用数学方法的时候，才能得到极大的发展。类似的话马克思说过，康德也说过。

在 20 世纪 50 年代之前，也不是没有金融理论，正如在 1776 年之前也不是没有经济学理论一样。经济学的早期思想可以追溯到古希腊的柏拉图（Plato，公元前 427 年～公元前 347 年）和色诺芬（Xenophon，公元前 430 年～公元前 355 年）那里，而金融学的早期思想则可以追溯到 15 世纪就开始流行的重商学派那里，在古典经济学派那里也

---

① 古诺的第一本学术著作是《概率论》，因为他是一位数学家。1833 年，古诺开始出任法国里昂大学的数学教授，还曾担任过数学学院的院长职务。他有两位几个世纪前是、再过几个世纪之后仍然会是大名鼎鼎的数学家老师，一位是拉普拉斯（Laplace)，另一位是泊松（Poisson)。

可以找到。但是在 20 世纪 50 年代以前，传统的金融理论的代表就是银行货币学、利息理论等这样一些简单的概念与原理。

当 1951 年年轻的哈里·马尔科维奇（Harry Markowitz）举行博士毕业论文答辩时，担任答辩委员会主席的是芝加哥大学著名经济学教授米尔顿·弗里德曼（Milton Friedman），这位后来在 1976 年获得诺贝尔经济学奖的货币主义创始人当时竟然犹犹豫豫地评论说马尔科维奇的证券投资组合理论看起来似乎不像是传统的经济学。由此可见，即使是大牌的经济学家在 20 世纪 50 年代对随即发展起来的现代金融理论的迎接从思想上也是准备不足的。

的确如此，在此之前的金融学研究只是描述性的，其中鲜见精致的数量分析。而在此之前的 100 多年里，在以戈森（Hermann Heinrich Gossen，1810～1858）、门格尔（Carl Menger，1840～1921）为代表人物的奥国边际学派，以杰文斯（William Stanley Jevons，1835～1882）为代表人物的英国边际学派，以及以杜布衣（Arsene Jules Etienne Juvenal Dupuit，1803～1866）、瓦尔拉斯（Marie E'sprit Léon Walras，1834～1910）为代表人物的法国传统边际学派的共同努力之下，数量分析方法在现代经济学的研究领域中早已是遍地黄花分外香了。

在传统的经济学研究中，比较注重的是需求与供给之间的均衡分析，着眼于均衡的存在性和均衡的变动。而现代金融理论则开始突破了这一框架，经常是以某项金融资产的头寸即对该项金融资产的持有或短缺作为分析的核心内容。现代金融理论的诞生直接带动了现代经济学的进一步发展。20 世纪 60 年代，现代经济学开始了一场重造基础的时期。数学中的集合论和博弈论开始被引入现代经济学，经济学家们开始致力于为现代经济学建立一个公理化的体系。随即集值映射、泛函分析、凸分析、微分包含、群论、拓扑学、变分法等大量尖端的数学方法开始进入现代经济学的研究领域。

虽然 1981 年被尊为现代金融理论奠基人的詹姆斯·托宾（James Tobin）最先因现代金融理论获得了诺贝尔经济学奖，但大家公认的还是马尔科维奇开创了现代金融理论。马尔科维奇从证券投资的非确定性出发，利用证券收益率的方差来度量证券投资的风险，并借助冯·诺伊曼（John Von Neumann）—摩根斯坦（Morgenstern）的期望效用理论，来为证券组合提供收益率与风险的度量。他还利用运筹学中的最优化方法，来研究使投资者期望效用最大化的证券组合。正因为他开创性的研究工作，1989 年美国运筹学会和管理科学学会授予了他冯·诺伊曼运筹学理论奖。

接下来，1990 年的诺贝尔经济学奖是一项真正的现代金融理论大奖，它代表着学术界对现代金融理论占据金融学主流地位的认可。马尔科维奇和他的后继者夏普以及提出双 M 定理的米勒共同获得了瑞典皇家科学院授予的这项荣誉以及约合 71 万多美元的奖金（400 万瑞典克朗）。与前前后后获得诺贝尔经济学奖的其他经济学家相比，他们的名字对人们来说可能是陌生的，但他们对现代金融理论的贡献都是当之无愧的。而此前还有现代金融理论的奠基人托宾和双 M 定理的另一个缔造者莫迪利阿尼获得过诺贝尔经济学奖。

在这之后，现代金融理论开始与经济计量学相融合，诞生了一门崭新的综合性新学

科——金融计量学。

经济计量学的发展可以被简单地划分为两个层次，20 世纪 70 年代以前是作为基础的经济计量学理论；而在此之后，一方面是经济计量学自身向着理论与方法更加完善的方向发展，另一方面则开始出现经济计量学与许多其他学科分支互相融合、并相互促进发展的局面。这是金融计量学诞生与发展的一个前提。

作为前一阶段的代表，有获得 1969 年第 1 届诺贝尔经济学奖的丁伯根（Jan Tinbergen)、弗里希（Regant Anton Kittil Frisch)，还有获得 1980 年第 12 届诺贝尔经济学奖的克莱因（Lawrence Robert Klein）和获得 1989 年第 21 届诺贝尔经济学奖的哈韦尔莫（Tryve Haavelmo)。甚至还应该包括与诺思（Douglass North）分享 1993 年诺贝尔经济学奖的福格尔（Robert Fogel)，虽然他的工作是 70 年代以后做的，但运用的仍然是经典的经济计量学。

丁伯根为经济计量学的理论化和系统化作出了卓越的贡献，出版了第一本内容比较完善的经济计量学方面的教科书，而弗里希则为第一个经济计量学研讨班和经济计量学学会的成立鞍前马后地做了大量的准备工作，创办《经济计量学杂志》并担任主编 20 余年，为经济计量学的创立与发展立下了汗马功劳。这些工作都是奠基性的，因而他们前者被称为“经济计量学之父”，后者则被称为“动态经济理论的开拓者”。

克莱因是将经济计量学的应用推向第一个高潮的先行者，他帮助许多国家都建立起宏观经济的经济计量学模型，被称为“经济计量模型之父”一点儿都不为过。而作为弗里希学生的哈韦尔莫，则继承了他的老师的理论与方法研究的衣钵，率先将随机因素和大量先进的统计理论引入经济计量学，开了依靠随机抽样调查推演经济理论、并利用统计数字进行经济预测的先河。他的工作使经济计量学更贴近现实，更具实用性，因此被称为“现代经济计量学之父”。

福格尔则是一位“经济计量史学先驱”，他认为：“经济分析问题是一个如何从数据中获得信息的问题……那些数据不一定能给予你所想获取的信息，你可能不得不以多种方式对过去的抽样——那些从一般商业信息或人口普查信息中已得到的样本进行重新整理，以便建立一套能反映出宏观方面的经济运行情况的国民收入账户。”他对经济计量学的贡献不仅在于他敢于用经济学方法去挑战历史上的一些经济理论，而且还在于他运用抽样方法建立起有关储蓄、税收和人口方面大量原始的微观经济数据集合。

作为后一阶段的代表，有获得 2000 年诺贝尔经济学奖的赫克曼（James J. Heckman)、麦克法登（Daniel. L. McFadden）和获得 2003 年诺贝尔经济学奖的恩格尔（Robert Engle）和格兰杰（Clive Granger)。

赫克曼和麦克法登是因为在微观计量经济学领域所做出的杰出贡献而获奖的，他们解决的都是微观数据统计分析中出现的基本问题。赫克曼发展了对选择性抽样数据进行分析的理论和方法，这些理论与方法有助于社会项目评估、非连续选择和纵向数据的经济计量学模式、劳工市场经济学以及收入分配的模式选择。麦克法登则发展了对自行选择行为进行分析的理论和方法，为建立运输业的经济模型、估计通信系统的变化以及研究老年人的电话服务和住宅投资提供了理论与方法。他们所发展的分析方法不仅在经济

理论方面具有牢固的基础，而且还在重大社会问题的实用研究领域发生了很大影响，现已成为经济学家和社会学家分析问题的“标准工具”。

格兰杰和恩格尔则被认为是在处理“时间序列”变量的研究方法上取得了重大突破。事实上，正是他们在经济计量学开始备受责难的20世纪70年代之后，带领大家开始重造经济计量学，不仅掀起了第二次经济计量学应用的高潮，而且还成为开金融计量学先河的人。在金融数据的分析方面被发现有很大潜力的、并使经济计量学理论能够给人以脱胎换骨感觉的协整理论（Co - integration Theory）与ARCH模型，就是他们两人奠基并且发展出来的。

因为收入、消费、价格水平和国内生产总值等许多宏观经济变量总是具有同向变动的趋势，而且金融领域里的市场信息总是非稳定的，传统的经济计量方法难以适用，所以格兰杰和恩格尔发展的协整理论的统计技术目前已成为中央银行、财政部、学术界和金融市场的经济预测人士经常使用的工具。尽管恩格尔和格兰杰共同从事关于协整的研究，但恩格尔却是因另外的成就而获奖，他的研究方向是波动性随时间而变化的变量，恩格尔的研究成果通常应用于金融市场的价格分析中。

当然，两阶段只是经济计量学发展的一个简单划分。事实上，在20世纪70年代之前，经济学的发展也经历过三四十年代的古典阶段和五六十年代的成长阶段，到了70年代，经济计量学已经达到了一个阶段性的高峰。而在70年代之后，又经历了七八十年代的成熟阶段和90年代以来的创新阶段。

在20世纪的三四十年代，经济计量学的内容主要是回归分析、最小二乘法及其检验以及联立方程组的建立。五六十年代开始对最小二乘估计提出新的检验方法，如使用Durbin - Watson检验自相关性等。

70年代，时间序列理论与高等计量经济学开始出现系统化的趋势，并逐渐走向成熟。渐近分布理论、广义最小二乘法、贝叶斯推断、非线性最小二乘法、似然比检验、拉格朗日乘子检验用于随机系数的方差检验、伯克斯 - 考克斯变换和蒙特 - 卡罗法等内容被不断提出。

80年代，迪凯（D.A.Dickey）、富拉尔（W.A.Fuller）等人针对非稳定的时间序列，开始提出单位根检验（Unit - root test）和ADF统计量作为检验标准。同时，LIML渐近估计理论、可变系数的动态回归理论、现场统计与小样本分析（包括模糊数学和灰色系统）、开关回归（Swiched Regression）、截余分析（Tobit Analysis）、频域分析（Frequency Domain Analysis）、方差分析、无限分布滞后模型（Distributed Lag Model）、斯坦准则（Stain Rule）、施瓦兹准则（Schwarz Criteria）以及SC准则、AIC准则和赤池准则（Akaike Criteria）等内容都被提出。

90年代，出现了条件均方差预测与条件异方差分析、稳健估计（Robustness Estimate）以及借助经济计量学方法的系统仿真模型等。同时，在迪凯、富拉尔等人的工作基础上，恩格尔（R.F.Engle）和格兰杰（C.W.J.Granger）提出并完善了协整理论（Co - integration Theory），还将协整理论的方法和条件异方差（ARCH）模型引入到金融研究领域，相当于重整了经济计量学。

正是随着70年代之后，经济计量学所发展出来的一些新方法在金融领域里的应用，诞生了崭新的交叉学科——金融计量学。金融计量学正是借助经济计量学方法，来分析金融学中特别是70年代之后开始流行的现代金融理论中的那些反映金融领域里诸变量之间复杂关系的交叉学科，旨在将经济计量学中新出现的一些新方法嵌入现代金融理论中。这种嵌入是革命式的，随着这些方法的嵌入，人们的观念在不断地更新，发现需要做的事情还有许多。可以预言：现代金融理论早晚会出现一次完善化的革命，而目前正是山雨欲来风满楼之际。

迄今为止，已有6届诺贝尔经济学奖被授予9位经济计量学家，而且在最近短短的5年中，就有两次共计4位经济计量学家获奖，这足以证明人们对经济计量学领域所取得的成就以及对70年代以后经济计量学快速发展的高度认可。

无独有偶的是，在金融领域里也先后有7届共计10位经济学家荣获诺贝尔经济学奖。这还没算2002年得奖的卡尼曼（Daniel Kahneman），虽然他被称为行为经济学派的代表人物，但的确是他引领了行动金融学的发展。而且他研究中使用的例子，大多数都来自于金融市场。70年代之后，布雷顿森林体系彻底解体，但新的金融制度始终没有建立起来，金融理论就越来越受到重视。几乎每过四五年就会有在金融领域里作出突出贡献的学者获诺贝尔经济学奖，就充分说明了这一点。

1974年获奖的哈耶克（Friedrich August Von Hayek）被称为“货币理论的首创者”；1976年获奖的弗里德曼（Milton Friedman）被称为“现代货币主义经济学大师”；1981年获奖的托宾（James Tobin）被称为“金融投资决策理论的先行者”；1985年获奖的莫迪利阿尼（Franco Modigliani）被称为“发现储蓄生命周期的人”；1990年同时获奖的马尔科维奇（Harry Markowitz）被称为“开拓金融经济学的先驱者”，夏普（William F. Sharpe）被称为“资本资产定价模型的创立者”，米勒（Merton Miller）则被称为“企业理财大师”；1997年同时获奖的默顿（Robert Merton）和斯科尔斯（Myron Scholes）被称为“期权理论的淘金者”；而1999年获奖的蒙戴尔（Robert A. Mundell）则被称为“欧元之父”。

在所有36届诺贝尔经济学奖的54位获奖者中，有13届被授予19位与经济计量学或金融理论有关的经济学家，占了三分之一强。在这样两个诺贝尔经济学奖的高产领域里，作为其相互融合、相互交叉产物的金融计量学的诞生几乎是必然的。而这一交叉学科的进一步发展也将会进一步促进这两个经济学重要领域的相互渗透和相互影响，相信最终会促进现代经济学的全面发展。

编写和出版这套现代金融理论前沿丛书，其初衷是为了将现代金融理论中一些作者有研究心得的内容系统地介绍一下，将国外学术研究前沿的理念和方法与我国现代金融理论研究的实践相联系。而本书则旨在系统地介绍金融计量学的内容与发展脉络，并利用中国股市的实际数据做了一下实证检验。与国外的研究相比，国内有关金融计量学的研究这些年的进展也较快，但仍然存在着很大差距。当然，由于作者研究能力有限等问题也不可避免地会造成一些本书的不足。但还是希望本书可以起到抛砖引玉的作用，为后来者提供一些研究上的支持。

我们相信在学术研究领域任何的尝试都是有益的，即使是失败也并不能阻止我们探索真理的步伐，如果成功便将会加快我们求知的速度。希望这套丛书能与大家共勉。

本书是在南开大学金融学系、国际经济研究所以及南开大学深圳金融工程学院的一些博士与硕士学位论文的基础上完成的，由周爱民教授做了总的润色和编纂。其中第一章（时间序列的理论及应用）、第二章（GARCH 模型的发展及应用）和第三章（VAR 模型与冲击响应函数）都是由金融学系徐辉完成的；第四章（协整理论及其应用）、第五章（面板单位根检验的理论）和第六章（单位根检验与结构突变）分别是由国际经济研究所的田翠杰、魏学辉和黄玉梅完成的；第七章（动量策略在中国股市的应用）是由金融学家的刘峰完成的；第八章（VaR 评估方法简介）、第九章（信用风险的度量与管理）和第十章（EVA 评价体系）分别是由南开大学深圳金融工程学院的李超、高靖和吴薇完成的；最后，第十一章（股票价格波动性的实证比较）和第十二章（资本市场的分形与 Hurst 指数）则分别是由国际经济研究所的莫扬和高永华完成的。

目　　录

第一章　时间序列的理论及应用

所谓时间序列是指根据时间的顺序将某个变量进行排列，从而产生的序列。该变量可以是一个经济指标或者商业指标，例如股票市场指数、利率、物价指数、汇率等，下面我们将以$y(t)$来表示该变量。

关于对$y(t)$可能会产生影响的因素，既包括那些我们可以知道的变量，也包括一些我们根本无法确切获知的变量，例如时尚的变化或者是人们的心理作用等。在这种情况下，使用传统的结构式模型来对$y(t)$进行解释，也许就比较困难，因为无法获得完整的可能对$y(t)$产生影响的有关因素的数据，或者即使能够得到解释因素的数据，但回归方程参数估计的标准误差太大，使得利用结构模型来解释$y(t)$的变动并不合适。

另外，有时即使能够得到关于$y(t)$的显著性令人满意的回归方程，其回归方程的预测能力可能也是很差的。这是因为在用回归方程在预测$y(t)$时，首先必须获得非滞后解释变量的预测值，而这有时甚至比预测$y(t)$本身更加困难。

因此，我们需要寻求另外的途径对$y(t)$变量进行有效的预测。能否通过观察$y(t)$时间序列本身，由此得到关于$y(t)$的过去行为的有关特性，从而对其未来的变化进行预测？这就产生了时间序列模型。

时间序列模型的分析方法最早是由博克斯—詹金斯（Box - Jenkins）于 1970 年提出的。时间序列模型的主要目标包括：

第一，确定变量过去行为的特性。

第二，预测。

这种建模方法不考虑以经济理论为依据的解释变量的作用，而是依据变量本身的变化规律，利用相应的外推机制描述时间序列的变化。一般来说，建立时间序列模型主要包括三个步骤：

第一，时间序列的识别和模型形式的选择。

第二，模型参数的估计。

第三，模型的诊断。

其中最重要的是第一步。对于给定的时间序列，模型形式的选择往往不是惟一的。

第一节　时间序列的定义与特性

一、时间序列的定义

一般来说，一个时间序列是在随机过程的基础上产生的，因此，首先让我们来看看随机过程的相关定义。

随机过程是指由随机变量组成的一个有序序列，可以记为 $\{x(s, t), s\in S, t\in T\}$。对于每一个 $t\in T$，$x(\cdot, t)$ 是样本空间 S 中的一个随机变量。对于每一个 $s\in S$，$x(s, \cdot)$ 是随机过程在序数集 T 中的一次实现。随机过程可以被简记为 $\{x_t\}$ 或者 x_t。

随机过程的一次观察结果即为一个时间序列，可以记为 x_t。

下面介绍最基本的随机过程——白噪声过程和随机游走过程，这两种随机过程在以后的其他模型的介绍中会多次提到。

白噪声过程：对于一个随机过程 x_t，$t\in T$，如果对任意的 t 和 $t+k$ 都属于区间 T，有 $E(x_t)=0$，并且 $Var(x_t)=\sigma^2<\infty$，$Cov(x_t, x_{t+k})=0$，$k\neq 0$，则称时间序列 x_t 为白噪声过程。

白噪声过程是平稳的随机过程，其期望为 0，方差为固定值，不随时间 t 的变化而变化，且随机变量间的相关系数也为 0，这都符合随机过程平稳性的定义，并且是一个二阶平稳过程。关于平稳性的定义，在本节接下来的部分将进行详细介绍。

随机游走过程：最简单的时间序列是随机游走过程。如果时间序列 x_t 满足方程（1.1.1）式的话：

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1.1.1}$$

则我们就称时间序列 x_t 为随机游走过程。其中，$t\in T$，ε_t 为白噪声过程，即满足：$E(\varepsilon_t)=0$，$Var(\varepsilon_t)=\sigma^2<\infty$，并且有：$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k})=0$，$t+k\in T$。由此可知，随机游走过程的一阶差分为白噪声过程。因此，随机游走过程的方差为无限大。

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots \tag{1.1.2}$$

$$Var(x_t) = Var(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots) = \sum_{-\infty}^{t}\sigma^2 \to \infty \tag{1.1.3}$$

这就使得它的均值变得毫无意义，因为随机游走过程无法估计其围绕均值波动的幅度，或者说，随机游走过程并不围绕着序列的均值波动。

如果我们要对这样一个随机游走过程进行预测，则对 $t+1$ 期的预测可以由下式给出：

$$\hat{x}_{t+1} = E(x_{t+1}|x_t, \cdots, x_1) = x_t + E(\varepsilon_{t+1}) = x_t$$

同样地对 $t+2$ 期的预测为：

$$\hat{x}_{t+2} = E(x_{t+2}|x_{t+1}, \cdots, x_1) = E(x_{t+2}|\hat{x}_{t+1}, \cdots, x_1) = \hat{x}_{t+1} + E(\varepsilon_{t+2}) = x_t$$

类似地，在 $t+l$ 期的预测值也是 x_t。

在预测值不变的同时，我们容易知道，预测的误差却是随着 l 的增大而增大。例如 $t+1$ 期的预测误差为：

$e_{t+1}=x_{t+1}-\hat{x}_{t+1}=\varepsilon_{t+1}$

而 $t+2$ 期的预测误差则为：

$e_{t+2}=x_{t+2}-\hat{x}_{t+2}=x_{t+1}+\varepsilon_{t+2}-\hat{x}_{t+1}=\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2}$

在预测误差变大的同时，预测误差的方差也同时变大。

随机游走是时间序列中最特殊的一种形式，在介绍时间序列的一般分类之前，需要先对时间序列的一些特性进行初步讨论。

二、时间序列的有关性质

具有平稳性的时间序列称为平稳时间序列（Stationary Time Series）。平稳性是时间序列的一个重要特性，时间序列是否具有平稳性特征，在研究时间序列的方法上是有重要区别的。一般来说，具有平稳性的时间序列比较容易处理，方法也比较简单。因此，在研究非平稳性时间序列时，往往都是先将其变换为平稳的时间序列。

简单地说，如果时间序列的特征随时间而变化，则该时间序列是非平稳的；而如果时间序列的特征不随时间而变化，则时间序列就是平稳的。一般来说，现实中的金融时间序列都是非平稳的，但通过差分可以将其转换为平稳的时间序列而进行研究。

根据前面对时间序列的定义，随机过程的一次观察结果即为一个时间序列，可以记为 x_t。因此，时间序列 x_1，…，x_t 代表服从概率分布 p（x_1，…，x_t）的随机过程的某一具体实现。类似地，一个未来的观测 x_{t+1} 可以被认为是由条件概率分布函数 p（$x_{t+1}|x_t$，…，x_1)生成，即 p（$x_{t+1}|x_t$，…，x_1）是给定过去观测值 x_1，…，x_t 下的 x_{t+1}的概率分布。我们定义平稳过程为其联合概率分布和条件分布均不随时间变化而变化的过程。因此，如果 x_t 序列是平稳的，则对任意的 t，k，m，都有下面两式成立：

$$p(x_t, \cdots, x_{t+k}) = p(x_{t+m}, \cdots, x_{t+k+m}) \tag{1.1.4}$$

$$p(x_t) = p(x_{t+m}) \tag{1.1.5}$$

这样的平稳性也被称为强平稳，强平稳意味着随机过程所有存在的矩都不随时间而变化。如果一个随机过程 m 阶矩以下的矩其取值与时间的变化无关，则称该过程为 m 阶平稳过程。

从上面对平稳过程基本性质的描述，可得出下面的结果。

如果序列 x_t 是平稳的，则序列的期望 E（x_t）也是平稳的，并且，序列的方差、协方差也是平稳的。

如果一个随机过程是平稳的，则概率分布 p（x_t）对于所有的 t 都是一样的。因此，它的形状或者其他的一些特性，就能够通过过去的观测数据 x_1，K，x_t 来推断出来，并且以后的序列仍旧拥有这样的特性。这样，就可以根据这些不随时间改变的特性来预测未来的序列值。例如，序列的数学期望可由序列的样本均值来表示：

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \tag{1.1.6}$$

同时，序列的方差可由样本的方差来表示：

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x}) \tag{1.1.7}$$

关于时间序列平稳性的检验一般采取单位根检验法，这一点我们将在后面予以介绍。

另外，关于时间序列的自相关函数与偏自相关函数，对研究时间序列也是非常重要的。它们可以部分地刻画随机过程，告诉我们在序列 x_t 附近的数据点之间存在着多大的相关关系。

我们定义滞后期为 k 的自相关函数为：

$$\rho_k = \frac{E\left[(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})\right]}{\sqrt{E\left[(x_t - \bar{x})^2\right] E(x_{t+k} - \bar{x})}} = \frac{\mathrm{Cov}(x_t,\ x_{t+k})}{\sigma_{x_t}\sigma_{x_{t+k}}} \tag{1.1.8}$$

对于方程（1.1.8）式，如果时间序列是稳定的，则第 t 期的方差与第 $t+k$ 期的方差是相等的，都等于时间序列的方差，因此方程（1.1.8）式的分母刚好就是随机过程的方差。以 γ_k 表示间隔 k 期的协方差，则有：

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{1.1.9}$$

以滞后期 k 为变量的自相关函数列 ρ_k 称为自相关函数。因为一般有：

$$\rho_k = \rho_{-k}$$

即自相关函数是零对称的，所以实际研究往往只需给出自相关函数的正半部分。

偏自相关函数是描述随机过程结构特征的另一种方法。首先用 ϕ_{kj} 表示 k 阶自回归式中第 j 个回归系数，k 阶的自回归模型表示为：

$$x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + K + \phi_{kk}x_{t-k} + \varepsilon_t \tag{1.1.10}$$

则我们可以知道，ϕ_{kk} 是回归方程最后一个回归系数，如果把 ϕ_{kk} 看作是滞后期为 k 的函数，则称 ϕ_{kk}（$k=1$，2，…）为偏自相关函数。因偏自相关函数中每一个回归系数 ϕ_{kk} 恰好表示 x_t 与 x_{t-k} 在排除了其中间变量后的自相关系数，所以偏自相关函数由此得名。关于自回归方程的具体特性，在本章的后面会进行详细的介绍。

在上面对时间序列的定义和基本特性进行介绍的基础上，对时间序列的一些种类，主要是时间序列模型进行分类介绍。

第二节 时间序列模型的分类

通过对不同时间序列模型的应用可以对特定的时间序列数据的特性进行解释，这也是时间序列模型的意义所在。在本节中我们将时间序列的模型分为以下几种：

（1）自回归模型（AR 模型）。

(2) 移动平均模型(MA 模型)。

(3) 自回归移动平均模型(ARMA 模型)。

(4) 单整自回归移动平均模型(ARIMA 模型)。

下面就对这四种时间序列模型进行详细的介绍。

一、自回归模型(AR 模型)

如果一个时间序列可以表示为下式的话:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \tag{1.2.1}$$

则该过程就被称为 p 阶的自回归过程,表示为 AR(p)。其中,ϕ_1 为时间序列表达式的回归参数,ε_t 为白噪声过程。相应地,一阶自回归过程可以写为:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1.2.2}$$

由方程(1.2.1)式可以知道,x_t 由其 p 个滞后变量的加权和以及残差 ε_t 组成。因此可以表示为滞后算子的形式:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p)\ x_t = \Phi(L)\ x_t = \varepsilon_t \tag{1.2.3}$$

其中 $\Phi(L)$ 被称为自回归算子。

一般来说,和自回归模型相联系的是时间序列平稳性的性质。如果自回归模型是平稳的,根据前面平稳性的定义,则自回归模型所表示序列的均值即期望值关于时间一定是常数。即有:

$$\mathrm{E}(x_t) = \mathrm{E}(x_{t-1}) = \cdots = \mu$$

于是根据回归表达式(1.2.1)式,两边取其期望可以得到:

$$\mu = \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu$$

在上面的情况下,可以知道,如果要等式成立,则 x_t 的期望 μ 必须等于常数零。另外更一般的情况是在(1.2.1)式中会存在常数项 δ,其与过程的均值取值有关,这样自回归方程变为:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \delta \tag{1.2.4}$$

则方程(1.2.4)式两边取期望可以得到:

$$\mu = \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu + \delta \tag{1.2.5}$$

或者,(1.2.5)式也可以表示为:

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p} \tag{1.2.6}$$

这个与过程均值有关的公式同时给出了一个关于过程平稳性的条件。如果过程平稳,则等式(1.2.6)式中的均值 μ 一定是有限的,否则,过程可能会漂移到离固定点很远,因而不具备平稳性特征。如果 μ 是有限的,则必然会有:

$$\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p < 1 \tag{1.2.7}$$

这个条件不足以保证 AR(p)过程的平稳性,因为 AR(p)过程的平稳性与其他许多条件有关,但这是最直接的符合平稳性的必要条件。