高等学校规划教材

多变量贝叶斯动态模型及其预测

刘福升 张孝令 周长银 杨新章 刘晓昀 陈桂东 著

煤炭工业出版社

高 等 学 校 规 划 教 材

多变量贝叶斯动态模型及其预测

刘福升 张孝令 周长银
杨新章 刘晓昀 陈桂东 著

煤 炭 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书系统介绍多变量贝叶斯动态模型及其预测的理论和方法。内容有矩阵变量动态线性模型；多变量动态线性模型（包括用于多变量趋势模型和季节模型的叠加原理，多变量多过程模型）；动态加权多变量回归模型；模型的各种修正递推及其预测方法；矩阵变量动态线性模型的方差确定；多变量聚集预测模型；多变量广义动态模型；多变量动态建模中几个重要问题。本书是近几年来作者和国内外学者在这方面最新研究的总结，内容新颖。

本书为经济、管理、应用数学等专业的研究生教材。对上述专业本科高年级学生及从事预决策与决策科技工作者也是一本很有价值的参考书。

高等学校规划教材

多变量贝叶斯动态模型及其预测

刘福升 张孝令 周长银
杨新章 刘晓昀 陈桂东 著

责任编辑：姚美华

*

煤炭工业出版社 出版发行

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

*

开本 850×1168mm 1/32 印张 10¼

字数 247 千字 印数 1—1，055

1997年8月第1版 1997年8月第1次印刷

ISBN 7-5020-1498-5/O174·43

书号 4267 定价 8.30 元

序

这本著作是作者们继1992年出版的《贝叶斯动态模型及其预测》(山东科学技术出版社出版)一书之后第二本关于贝叶斯动态模型的著作，它主要讨论了多变量或多指标的贝叶斯动态模型及其预测。我们知道，单一指标往往不足以描述一个事物的特征，例如描述人体，就有身高、体重、胸围等指标。当然，人们研究总是从单一指标、单一变量开始，因为研究起来比较简单明了，易于推导和计算。但事物是复杂的，客观上确实需要研究多变量的情况，以往由于计算上的困难不易实现，但今天电子计算机的飞速发展，使得复杂计算成为可能。因此，多变量统计的研究成为了当今世界注重的中心之一，值得我们重视。这本讨论多变量贝叶斯动态模型著作的出版是很有意义的。这本书收集了国内外文献近60篇，国外的有M. West和P. J. Harrison的专著“Bayesian Forecasting and Dynamic Models”，等30余篇，国内文献近30篇。特别值得一提的是，近几年来以山东矿业学院张孝令、刘福升教授为首的研究小组已取得了一批成果。此书就是作者对自己的工作成果和国内外在此方面研究的总结，它反映了90年代此方向的水平，具有重要的理论意义和实用价值。这本书的完成是集体的成果。一个研究小组不能面面俱到，但做出一批有自己特色、特长的工作是非常重要的。我还应提到一点，这本著作比起第一本有一个重要的不同点，就是有了应用实例，这给本书增色不少，有利于读者理解和使用这一方法，也说明这一方法已在国内发挥了效用，这是值得庆贺的事。

为了读者易于理解、掌握概念和方法，作者用了一章的篇幅

叙述了单变量贝叶斯动态模型，对采样间隔均匀和非均匀的时间序列进行了讨论，还论述了无信息先验分布的选择，这是国际上通常的选取办法。我要指出的一点是，使用无信息先验分布是迫不得已而为之。按照贝叶斯哲学原理，是要用主观的历史经验来选取先验分布才能表述贝叶斯统计的特色及长处，而使用无信息先验分布推导出来的结果与经典频率统计的结果是无本质差别的。为了使读者能方便地应用此方法，在这一章里作者还介绍了软件系统。此书第二章着重讨论多变量贝叶斯动态模型一般理论及方法，这是该书的中心内容，涉及了递推与预测，几种实用典型模型的叠加，多个过程的混合等内容，它开始以矩阵变量作出发点，然后论述多变量情况。第三章叙述了几种多变量线性模型的递推算法，如平方根滤波，指数加权递推算法，逆协方差阵的递推算法，扫描递推算法。第四章论述了各协方差阵的确定，其中，均值与协方差阵先验分布的选取大多取为共轭的先验分布。第五章讨论了一种特殊实用的多变量贝叶斯聚集预测，分“由上到下”和“由下到上”两种聚集预测。第六章讨论了多变量广义动态模型，最后一章指出多变量贝叶斯动态建模中的几个问题。本书最后给出了矩阵理论及多元分布两个附录，这是此书的基础知识部分，读者欲深入了解此书的内容，对这些附录的知识必须很好掌握。我提供以上意见，供读者读此书时参考。

成　平

中国科学院系统科学研究所

1997年1月

前　言

1992 年《贝叶斯动态模型及其预测》一书由山东科学技术出版社出版，该书较为系统地介绍了当时国内外有关这方面研究的新内容和新方法，但该书侧重介绍了单变量贝叶斯动态模型及其预测的理论和方法，对于多变量的情况，只用了很少的篇幅叙述。鉴于实际问题大多是多变量的情况，所以，研究多变量贝叶斯动态模型及其预测具有很高的理论价值和应用价值。近年来，作者对这方面的理论和方法开展了一定的研究，并取得了一批重要成果。作者将自己和国内外学者在这方面的研究成果加以总结写成此书，希望借此能进一步推动国内外学者对多变量动态模型的研究。

本书系山东省自然科学基金项目《多变量贝叶斯动态模型及其预测》的总结。该书的出版得到了山东省自然科学基金委员会，山东矿业学院教材建设基金委员会，山东矿业学院应用数学与软件工程系，新汶矿务局毛元仁副局长、苏景春总工程师，枣庄市经济委员会蔡思川副主任，滕州市煤炭工业局邢绪才总工程师等的大力支持和帮助，还得到了中国科学院原系统科学研究所所长、中国数学会概率统计学会理事长成平研究员的热情指导和帮助，是他对全书进行了非常认真的审阅，并提出了很多宝贵意见，还为本书作了《序》。另外，还得到了张承进、葛颜祥、刘安、蒋金凤、富元斋、陈晓强、崔晓瑜、郝飞龙等的大力支持和帮助。在此，作者诚挚地向上述单位和个人表示衷心的感谢。特别值得一提的是英国统计学家 P. J. Harrison 教授，是他引导作者进入了这一领域的研究，几年来，作者一直得到他的热情指导和大力帮

助，在此作者深表感谢。

因篇幅所限，在《贝叶斯动态模型及其预测》一书中出现过的概念，在本书中没有重新叙述，而是直接引用，因此，建议读者阅读此书前应先阅读《贝叶斯动态模型及其预测》一书。

由于时间仓促，书中的缺点和错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

作　者

1997 年 3 月

符号说明

A_t'——矩阵 A_t 的转置。

C_t^{-1}——矩阵 C_t 的逆阵。

$diag\ (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$——对角线上元素为 λ_1，λ_2，…，λ_n 的对角矩阵。

$block\ diag\ (\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_p)$——对角线上元素为矩阵 δ_1，δ_2，…，δ_p 的块对角阵。

$Vec\ (Y_t)$——矩阵 Y_t 的拉直运算。

$tr\ (A)$——矩阵 A 的迹，有时用 trace (A) 表示。

$M\otimes\Sigma$——矩阵 M 与 Σ 的 kronecker 积。

$etr\ (A)$——表示 $e^{tr(A)}$ 或 $\exp\ \{tr\ (A)\}$。

$int\ (p/2)$——小于 $\frac{p}{2}$ 的最大整数。

$const$——常数。

$E\ (x)$——随机变量（或随机向量）X 的均值。

$E\ (X|Y)$——给定 Y 条件下 X 的条件期望。

$Var\ (X)$——随机变量（或随机向量）X 的方差（阵）。

$Var\ (X|Y)$——给定 Y 条件下 X 的条件方差（阵）。

$cov\ (X,\ Y)$——随机变量（或随机向量）X，Y 的协方差（阵）。

$\underset{\theta}{E}p\ (\theta|\Sigma)$——$P\ (\theta|\Sigma)$ 关于 θ 的期望。

$\underset{\binom{\theta}{\Sigma}}{E}X\ (\theta,\ \Sigma)$——$X\ (\theta,\ \Sigma)$ 关于 $\begin{pmatrix}\theta\\ \Sigma\end{pmatrix}$ 的期望。

$\underset{\theta|\Sigma}{E}X(\theta,\Sigma)$——$X(\theta,\Sigma)$在$\Sigma$已知条件下关于$\theta$的期望。

$N[0,V_t]$——均值为零，方差为V_t的正态分布。

$N[f,Q,\Sigma]$——均值为f，左方差阵为Q，右方差阵为Σ的矩阵正态分布。

$\Gamma[n,d]$——伽玛分布。

$\Gamma^{-1}[n,d]$——反（逆）伽玛分布。

$N\Gamma^{-1}[m,c;s,d]$——正态反（逆）伽玛分布。

$T_{n_t}[m_t,R_t]$——多元T分布。

$T[f,Q;s,d]$——矩阵T分布。

$W[s,d]$——Wishart分布。

$W^{-1}[s,d]$——反（逆）Wishart分布。

$NW^{-1}[m,c;s,d]$——矩阵正态反（逆）Wishart分布。

$\nu_t\sim[0,V_t]$——ν_t的均值为零，方差为V_t。

$\nu_t\sim[m,c,\Sigma]$——ν_t的均值为m，左、右方差阵分别为C，Σ。

目　录

第一章　单变量贝叶斯动态模型及其预测

本章简单叙述单变量贝叶斯动态模型及其预测的基本内容，并着重介绍我们研制的一套可供使用的单变量贝叶斯动态预测软件系统。

第一节　采样间隔均匀时间序列的贝叶斯动态模型及其预测

一、贝叶斯动态模型

贝叶斯预测方法和其它预测方法一样，都需要建立模型，本书用贝叶斯方法所建立的模型是一种动态模型，但模型形式的选择是至关重要的，它直接影响预测结果。读者在建模前，必须详细分析输出响应系统的动态状况，以便选择合适的预测模型。在我们研制的动态预测软件系统中，我们的动态线性模型与特殊的非线性动态模型仅限于描述单变量等间隔的时间序列。对于一般性动态模型的理论，文献［1］都已进行了详细讨论，这里只作一般性描述。

1. 动态模型的一般形式

软件系统涉及的动态模型与特殊的动态非线性模型具有下列形式：

动态线性模型：$y_t=\mu_t+\nu_t$ (1.1.1)

$$\mu_t=p_t+s_t+\gamma_t \tag{1.1.2}$$

动态非线性模型：$y_t=\mu_t+\nu_t$ (1.1.3)

$$\mu_t=(p_t+\gamma_t)\,s_t \tag{1.1.4}$$

其中 y_t 表示系统输出响应，μ_t 表示与 y_t 有关的基本水平。ν_t

是系统观测误差项，p_t 为输出系统的局部多项式趋势，s_t 为季节影响，γ_t 为一个或多个回归变量序列的回归响应。因此，观测值序列一般可分解为趋势分量、季节分量、回归分量以及观测误差项。假设 D_t 为观测值 y_t 及当前时刻以前的观测值所组成的信息集，即 $D_t=\{y_t, D_{t-1}\}$，基于上述模型形式以及当前信息集 D_t，我们就可以用贝叶斯预测中采用的参数估计方法，对序列当前的参数进行估计，然后进行预测，序列的预测值可由各个分量的预测值组成。

2. 多项式趋势分量模型

多项式趋势模型在统计领域中有着广泛的应用。一般，时间序列中的局部趋势可由低阶多项式逼近，特别对短期预测，用不超过二阶的多项式模型就能给出较好的拟合。

1）方差 V_t 为已知的一阶多项式趋势模型

定义 1.1 观测误差方差为已知的一阶多项式趋势模型具有如下形式：

观测方程：$y_t=\mu_t+\nu_t,\ \nu_t \sim N[0, V_t]$ (1.1.5)

状态方程：$\mu_t=\mu_{t-1}+\beta_{t-1}+\omega_{t1}$ (1.1.6)

$\beta_t=\beta_{t-1}+\omega_{t2},\ \omega_t \sim N[0, \boldsymbol{W}_t]$

初始信息：$\left(\begin{matrix}\mu_0\\ \beta_0\end{matrix}\middle| D_0\right) \sim N[\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{C}_0]$ (1.1.7)

其中 $\omega_t=(\omega_{t1}, \omega_{t2})'$ 与 ν_t 独立，且相互独立，μ_t 为序列的水平，β_t 表示水平的变化，$D_0=\{t=0$ 时的所有信息$\}$，$D_t=\{y_t, D_{t-1}\}$。

定理 1.1 在模型（1.1.5）—（1.1.7）中，设

$$\left(\begin{matrix}\mu_{t-1}\\ \beta_{t-1}\end{matrix}\middle| D_{t-1}\right) \sim N[\boldsymbol{M}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1}]$$

其中 $\boldsymbol{M}_{t-1}=\begin{pmatrix}m_{t-1}\\ b_{t-1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_{t-1}=\begin{pmatrix}C_{t-1,1} & C_{t-1,3}\\ C_{t-1,3} & C_{t-1,2}\end{pmatrix}$

且状态误差方差阵 $\boldsymbol{W}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_{t1} & \boldsymbol{W}_{t3}\\ \boldsymbol{W}_{t3} & \boldsymbol{W}_{t2}\end{pmatrix}$

则 （1）t 时刻的先验分布：

$$\begin{pmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{pmatrix} D_{t-1}\Bigg) \sim \boldsymbol{N}\left[\boldsymbol{a}_t,\ \boldsymbol{R}_t\right]$$

其中 $a_t=\begin{pmatrix}m_{t-1}+b_{t-1}\\ b_{t-1}\end{pmatrix}$，$R_t=\begin{pmatrix}R_{t1} & R_{t3}\\ R_{t3} & R_{t2}\end{pmatrix}$

$R_{t1}=(C_{t-1,1}+2C_{t-1,3}+C_{t-1,2})+W_{t1}$

$R_{t2}=C_{t-1,2}+W_{t2}$

$R_{t3}=(C_{t-1,2}+C_{t-1,3})+W_{t3}$

（2）t 时刻的一步预测分布：

$$(y_t|D_{t-1})\sim \boldsymbol{N}\left[f_t,\ Q_t\right]$$

其中 $f_t=m_{t-1}+b_{t-1}$，$Q_t=R_{t1}+V_t$

（3）t 时刻的后验分布：

$$\left(\begin{matrix}\mu_t\\ \beta_t\end{matrix}\middle| D_t\right)\sim \boldsymbol{N}\left[\boldsymbol{M}_t,\ \boldsymbol{C}_t\right]$$

其中 $\boldsymbol{M}_t=\begin{pmatrix}M_t\\ b_t\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_t=\begin{pmatrix}C_{t1} & C_{t3}\\ C_{t3} & C_{t2}\end{pmatrix}$

$m_t=m_{t-1}+b_{t-1}+A_{t1}e_t$，$A_{t1}=R_{t1}/Q_t$

$b_t=b_{t-1}+A_{t2}e_t$，$A_{t2}=R_{t3}/Q_t$

$C_{t1}=A_{t1}V_t$，$C_{t2}=R_{t2}-A_{t2}\boldsymbol{R}_{t3}$

$C_{t3}=A_{t2}V_t$，$e_t=y_t-f_t$

定理 1.2 在模型（1.1.5）－（1.1.8）中，当整数 $k\geqslant1$ 时，

$\begin{pmatrix}\mu_{t+k}\\ \beta_{t+k}\end{pmatrix}$，$y_{t+k}$的分布分别为

$$\left(\begin{matrix}\mu_{t+k}\\ \beta_{t+k}\end{matrix}\middle| D_t\right)\sim \boldsymbol{N}\left[\boldsymbol{a}_t(\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{k})\right]$$

$$(y_{t+k}|D_t)\sim \boldsymbol{N}\left[\boldsymbol{f}_t(\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{Q}_t(\boldsymbol{k})\right]$$

其中 $a_t(k)=\begin{pmatrix}m_t(k)\\ b_t(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_t(k-1)+b_t(k-1)\\ b_t(k-1)\end{pmatrix}$

$$R_t(k)=\begin{pmatrix}R_{t1}(k) & R_{t3}(k)\\ R_{t3}(k) & R_{t2}(k)\end{pmatrix}$$

$$R_{t1}(k)=R_{t1}(k-1)+2R_{t3}(k-1)+R_{t2}(k-1)$$

$$R_{t2}(k)=R_{t2}(k-1)$$

$$R_{t3}(k)=R_{t2}(k-1)+R_{t3}(k-1)$$

$$f_t(k)=m_t(k)$$

$$Q_t(k)=R_{t1}(k)$$

2）方差 V_t 未知的一阶多项式趋势模型

对于一阶多项式趋势模型，当观测误差方差 $V_t=V$ 为未知常数时，有

观测方程：$y_t=\mu_t+\nu_t$，$\nu_t \sim N\ [0,\ V]$

状态方程：$\mu_t=\mu_{t-1}+\beta_{t-1}+\omega_{t1}$

$\beta_t=\beta_{t-1}+\omega_{t2}$，$\omega_t=\ (\omega_{t1},\ \omega_{t2})' \sim T_{n_{t-1}}\ [0,\ \boldsymbol{W}_t]$

信　　息：$\left(\begin{matrix}\mu_{t-1}\\ \beta_{t-1}\end{matrix}\middle| D_{t-1}\right) \sim T_{n_{t-1}}\ [\boldsymbol{M}_{t-1},\ \boldsymbol{C}_{t-1}]$

其中 $\boldsymbol{M}_{t-1}=\begin{pmatrix}m_{t-1}\\ b_{t-1}\end{pmatrix}$，$C_{t-1}=\begin{pmatrix}C_{t-1,1} & C_{t-1,3}\\ C_{t-1,3} & C_{t-1,2}\end{pmatrix}$

则 $\left(\begin{matrix}\mu_t\\ \beta_t\end{matrix}\middle| D_{t-1}\right) \sim T_{n_{t-1}}\ [\boldsymbol{a}_t,\ \boldsymbol{R}_t]$

其中 $\boldsymbol{a}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{m}_{t-1}+\boldsymbol{b}_{t-1}\\ \boldsymbol{b}_{t-1}\end{pmatrix}$

$$R_t=\begin{pmatrix}R_{t1} & \boldsymbol{R}_{t3}\\ \boldsymbol{R}_{t3} & \boldsymbol{R}_{t2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{t1}=\boldsymbol{C}_{t-1,1}+2\boldsymbol{C}_{t-1,3}+\boldsymbol{C}_{t-1,2}+\boldsymbol{W}_{t1}$$

$$\boldsymbol{R}_{t2}=\boldsymbol{C}_{t-1,2}+\boldsymbol{W}_{t2}$$

$$\boldsymbol{R}_{t3}=\ (\boldsymbol{C}_{t-1,2}+\boldsymbol{C}_{t-1,3})\ +\boldsymbol{W}_{t3}$$

$$(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{D}_{t-1})\ \sim\Gamma\ [\boldsymbol{n}_{t-1}/2,\ \boldsymbol{d}_{t-1}/2],\ \boldsymbol{\phi}=V^{-1}$$

预测分布：

$$(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{D}_{t-1})\ \sim\boldsymbol{T}_{n_{t-1}}\ [f_t,\ Q_t]$$

其中　$f_t=m_{t-1}+b_{t-1}$

$Q_t=R_{t1}+S_{t-1}$，$S_{t-1}=d_{t-1}/n_{t-1}$

修正递推关系：

$$\left(\begin{matrix}\mu_t\\ \beta_t\end{matrix}\middle| D_t\right)\sim T_{n_t}\ [\boldsymbol{M}_t,\ \boldsymbol{C}_t]$$

$$(\phi|D_t)\ \sim\Gamma\ [n_t/2,\ d_t/2]$$

其中　$\boldsymbol{M}_t=\begin{pmatrix}m_t\\ b_t\end{pmatrix}$，$C_t=\begin{pmatrix}C_{t1} & C_{t3}\\ C_{t3} & C_{t2}\end{pmatrix}$

$m_t=m_{t-1}+b_{t-1}+A_{t1}e_t$，$b_t=b_{t-1}+A_{t2}e_t$

$C_{t1}=\dfrac{s_t}{s_{t-1}}\ (R_{t1}-A_{t1}^2Q_t)$

$C_{t2}=\dfrac{s_t}{s_{t-1}}\ (R_{t2}-A_{t2}^2Q_t)$

$C_{t3}=\dfrac{s_t}{s_{t-1}}\ (R_{t3}-A_{t1}A_{t2}Q_t)$

$n_t=n_{t-1}+1$，$d_t=d_{t-1}+S_{t-1}e_t^2/Q_t$

$s_t=d_t/n_t$，$e_t=y_t-f_t$

$A_{t1}=R_{t1}/Q_t$，$A_{t2}=R_{t3}/Q_t$

超前 k 步的预测分布：

$$(y_{t+k}|D_t)\ \sim T_{n_t}\ [f_t\ (k),\ Q_t\ (k)]$$

其中　$f_t(k)=m_t(k)$

$Q_t(k)=R_{t1}(k)+ks_t$

$m_t(k)=m_t(k-1)+b_t(k-1)$

$R_{t1}(k)=R_{t1}(k-1)+2R_{t3}(k-1)+R_{t2}(k-1)$

3）一阶多项式趋势折扣模型

在实践中，多项式趋势模型常常作为模型的一个分量来采用，而在多项式趋势模型中，状态误差方差阵不易确定。一般，对这个分量模型应用折扣概念来构造状态误差方差阵。

定义 1.2　状态误差方差阵为

$$W_t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}C_{t-1}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(1-\delta)/\delta$$

的一阶多项式趋势模型称为一阶多项式趋势单折扣模型，其中 $0<\delta\leqslant 1$ 称为折扣因子。

从实用观点看，通常将整个多项式趋势模型看成是应用一个折扣因子的分量模型。当然，也可以应用两个折扣因子，一个对水平，一个对增长，假设 δ_1 是对水平的折扣因子，δ_2 是对增长的折扣因子，设

$$\Delta=\mathrm{diag}\ (\delta_1^{-\frac{1}{2}},\ \delta_2^{-\frac{1}{2}}),\ 0<\delta_1,\ \delta_2\leqslant 1$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_t&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Delta C_{t-1}\Delta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1^{-\frac{1}{2}}&0\\0&\delta_2^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{t-1,1}&C_{t-1,3}\\C_{t-1,3}&C_{t-1,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1^{-\frac{1}{2}}&0\\0&\delta_2^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\delta_1^{-1}C_{t-1,1}+2(\delta_1\delta_2)^{-\frac{1}{2}}C_{t-1,3}+\delta_2^{-1}C_{t-1,2}&\delta_1^{-\frac{1}{2}}\delta_2^{-\frac{1}{2}}C_{t-1,3}+\delta_2^{-1}C_{t-1,2}\\\delta_1^{-\frac{1}{2}}\delta_2^{-\frac{1}{2}}C_{t-1,3}+\delta_2^{-1}C_{t-1,2}&\delta_2^{-1}C_{t-1,2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故有递推关系式：

$$R_{t1}=\delta_1^{-1}C_{t-1,1}+2\ (\delta_1\delta_2)^{-\frac{1}{2}}C_{t-1,3}+\delta_2^{-1}C_{t-1,2}$$

$$R_{t2}=\delta_2^{-1}C_{t-1,2}$$

$$R_{t3}=(\delta_1\delta_2)^{-\frac{1}{2}}C_{t-1,3}+\delta_2^{-1}C_{t-1,2}$$

$$f_t=m_{t-1}+b_{t-1}$$

$$Q_t=R_{t1}+V_t$$

$$m_t=m_{t-1}+b_{t-1}+A_{t1}e_t$$

$$b_t=b_{t-1}+A_{t2}e_t$$

$$C_{t1}=A_{t1}V_t$$

$$C_{t2}=R_{t2}-A_{t2}R_{t3}$$

$$C_{t3}=A_{t2}V_t$$