XIANXING
DAISHU

Tu Xiaoqing
Li Jie
Bianzhu

线性代数

涂晓青　李　捷 ● 编著

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

XIANXING
DAISHU
Tu Xiaoqing
Li Jie
Bianzhu

线性代数

涂晓青　李　捷◎编著

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/涂晓青,李捷编著.—成都:西南财经大学出版社,2004.12
ISBN 7-81088-286-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①涂…②李… Ⅲ.线性代数—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 110334 号

线性代数

涂晓青 李捷 编著

责任编辑:王文
封面设计:大涛视觉传播设计事务所

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://press.swufe.edu.cn
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	郫县犀浦印刷厂
开　　本:	890mm×1240mm 1/32
印　　张:	7.5
字　　数:	194 千字
版　　次:	2004 年 12 月第 1 版
印　　次:	2004 年 12 月第 1 次印刷
印　　数:	1—3000 册
书　　号:	ISBN 7-81088-286-4/O·005
定　　价:	12.00 元

前 言

随着科学技术的发展和信息技术的普及,在成人继续教育中,《线性代数》课程从教学内容到教学方法都发生了较大变化,特别是网络教育的兴起,旧的教学内容和教学方法已经不适应《线性代数》课程的发展需要.本教材在编写内容上既涵盖了教育部颁布的高等财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲中线性代数部分的全部基本要求,又参考了全国高等教育自学考试《线性代数》考试大纲,可以满足普通高等财经院校、成人院校以及自学考试中经济类、管理类各专业对《线性代数》课程的要求。

考虑到接受成人继续教育的初学者的实际情况,在本教材的编写过程中,编者尽量注意贯彻由浅入深、循序渐进和融会贯通的原则,力求既注重基本概念、基本理论和基本方法的阐述,又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养.

本书共分五章和附录.第一、三章及附录由李捷执笔,第二、四、五章由涂晓青执笔,全书由涂晓青统稿,李捷参与了部分统稿工作.

本书是在西南财经大学成人教育学院、网络教育学院和西南财经大学出版社的关心和支持下完成的,西南财经大学经济数学系的老师们也对本书的编写提供了很多非常好的建议.编者借此一并致谢.

限于编者水平所限,本书中疏漏与不当之处在所难免,恳请同行及广大读者指正.

编 者

2005 年 1 月于光华园

目　录

第一章　行列式

行列式理论是线性代数的重要组成部分,是研究线性方程组的有力工具,它在生产实际和经济管理中有着广泛的应用.本章从行列式的概念出发,介绍行列式的性质和计算方法,并提供求解一类线性方程组的方法——克莱姆(Gramer)法则.

§1.1　n 阶行列式的定义

一、排列中的逆序与逆序数

为了获得 n 阶行列式的定义,需介绍排列及其有关的概念.

定义 1.1　把 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 排成一个有序数组

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

称为 n **级排列,简称排列**.

例如,12345,42351 是 5 级排列,21458673 是 8 级排列.

一般地,n 级排列的总数为$n!$种.例如3级排列的总的排列方法有 $3! = 6$ 种,即 123;132;213;231;312;321.

定义 1.2　在一个 n 级排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果 $s < t$ 时,$i_s > i_t$,即一对数的前后位置与大小顺序相反,则称数对 i_s 与i_t 构成一个**逆序**.一个 n 级排列中逆序的总数,称为 n 级排列的**逆序数**,记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

例如,在5级排列42351中,构成逆序的数对有42,43,41,21,31,51共6个.故 $\tau(42351) = 6$.而在 n 级排列 $123\cdots n$ 中,没有构成逆序的数对,故 $\tau(123\cdots n) = 0$.我们称这种逆序数为零的排列

为 n 级**自然排列**.

如果一个 n 级排列的逆序数为偶数，则称之为**偶排列**，显然 5 级排列 42351 是偶排列. 如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，则称之为**奇排列**，如 5 级排列 24135 是奇排列，因为 $\tau(24135)=3$.

定义 1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置，其余各数位置不变，就得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的互换称为排列的一次**对换**，记作 (i_s,i_t). 特别地，若互换的是相邻的两个元素，则称为**相邻对换**.

例如：$42351 \xrightarrow{(3,1)} 42153$.

对换有如下重要性质：

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 (1) 如果对换是相邻对换，在排列

$$i_1 i_2\cdots i_s i_t\cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1 i_2\cdots i_t i_s\cdots i_n$$

因为对换后除了 i_s 与 i_t 外，其余任意两数间的序数都未动，所以当 $i_s<i_t$ 时，对换后排列仅增加一个逆序，当 $i_s>i_t$ 时，对换后排列仅减少一个逆序. 因此经相邻对换后排列的逆序数增加或减少 1 个，故相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 如果对换不是相邻对换，在排列

$$i_1 i_2\cdots i_s a_1 a_2\cdots a_k i_t\cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1 i_2\cdots i_t a_1 a_2\cdots a_k i_s\cdots i_n$$

该排列可以看成由原排列中的 i_t 依次和前面的数作 $k+1$ 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2\cdots i_t i_s a_1 a_2\cdots a_k\cdots i_n$$

后，再让 i_s 依次和它后面的数作 k 次相邻对换得到的，即对换后的排列可由原排列经 $2k+1$ 次相邻对换得到. 所以非相邻对换亦改变排列的奇偶性.

综上所述:对换改变排列的奇偶性.

进一步可以证明,任意一个 n 级排列,经过有限次对换总可变成自然排列.而且还有如下结论:

定理 1.2　在所有 n 级排列中,奇排列和偶排列的个数相同,各为$\frac{n!}{2}$个.

二、二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.为此,我们回顾初等代数中二、三元线性方程组的求解过程,从中引出二、三阶行列式的概念.

设含有两个未知量 x_1, x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

利用加减消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得到唯一解

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 &= \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \tag{1-2}$$

为便于研究,我们可以将(1 - 2) 式的分母记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**.其中横排称为行,纵排称为列.

二阶行列式的计算方法可用图 1 - 1 来帮助记忆.

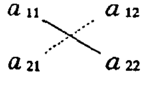

图 1－1

图 1 - 1 说明二阶行列式的值等于实线上两个元素乘积与虚线上两个元素乘积的差.

例如,$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

利用上述定义,(1 - 2) 式中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \tag{1 - 4}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \tag{1 - 5}$$

因此,对二元线性方程组(1 - 1),在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1 - 6}$$

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

解 根据二元线性方程组的求解公式(1 - 6),有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{1} = -1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

类似地,为求解含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-7}$$

我们记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \tag{1-8}$$

称为**三阶行列式**.

在(1 - 8) 式中,元素 a_{11},a_{22},a_{33} 所在的对角线称为**主对角线**,a_{13},a_{22},a_{31} 所在的对角线称为**副对角线**.

三阶行列式的计算方法可用图 1 - 2 来帮助记忆.

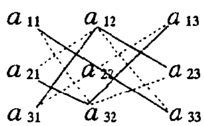

图 1 - 2

图 1 - 2 表明:沿各实线上三个元素的乘积取正号;沿虚线上三个元素的乘积取负号.它们的代数和就是三阶行列式(1 - 8) 的值.

由此关于三元线性方程组(1 - 7),当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1 - 7)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-9}$$

一般地，称 D 为方程组(1 - 7)的系数行列式，而 D_1,D_2,D_3 是分别把 D 中的第1列、第2列、第3列中的各数换成常数项 b_1，b_2,b_3 构成的.

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D=2\times2\times2+(-1)\times1\times3+4\times(-1)\times1-3\times2\times4-1\times1\times2-2\times(-1)\times(-1)=-27$

例3 当 x 为何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= 3\times5\times2+2\times3\times(-1)+2\times1\times x \\ &\quad -(-1)\times5\times2-x\times3\times3-2\times1\times2 \\ &= 30-7x=2\end{aligned}$$

解得 $x=4$.

故当 $x=4$ 时,行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2.$

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=a \\ -x_1+x_2+x_3=b \\ x_1-x_2+x_3=c \end{cases}$$

解　由系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}=2(a+c)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=2(a+b)$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}=2(b+c)$$

故方程组有唯一解,由(1－9)式可知

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{1}{2}(a+c) \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{1}{2}(a+b) \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{1}{2}(b+c) \end{cases}$$

三、n 阶行列式的定义

实际中,除了二阶、三阶行列式外,常常还会遇到阶数较高的

行列式,为此我们需要定义更具普遍意义的 n 阶行列式.

再来考察三阶行列式(1 - 8).由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

容易看到三阶行列式具有如下特征:

1. 三阶行列式表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积称为行列式的项,可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-10}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 遍取了 3 级排列时,即得到三阶行列式的所有项(不包含符号),共为 $3! = 6$ 项.

2. 每一项都带有符号. 项中行下标成自然排列时,当其列下标 $j_1j_2j_3$ 为偶排列,项(1 - 10) 取正号;当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列,项(1 - 10) 就取负号. 因此,称$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 为行列式的一般项.

所以三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示遍取所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 时,对一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

求和.

显然,二阶行列式也符合这些特征,并可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

根据二、三阶行列式的特征,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-11}$$

称为 n **阶行列式**(其中横排称为**行**,纵排称为**列**,元素 a_{ij} 的第一下标和第二下标分别表示元素所处的行和列,称为**行标**和**列标**),它表示为所有取自不同行及不同列的 n 个数乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-12}$$

的代数和.各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号是:行标依次构成自然排列时,若列标构成的 n 级排列$j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,(1 - 12) 式取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,(1 - 12) 式取负号.即 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-13}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 级排列求和,共有 $n!$项.

显然,由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是其自身,即 $|a_{11}|=a_{11}$.

例如,一个 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

所表示的代数和中有 $4! = 24$ 项.

其中乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的各元素的行标已经是 4 级自然排列 1234,列标也构成 4 级自然排列 1234,其逆序数为 $\tau(1234) = 0$,且 $(-1)^{\tau(1234)} = (-1)^0 = 1$,故此项的符号为正号.乘积 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 的各元素的行标也已经是 4 级自然排列 1234,各元素的列标构成 4 级排列 2413,其逆序数为 $\tau(2413) = 3$.故此项的符号为负号.而乘积 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$ 有两个元素取自第 1 列,故它不是行列式的一个乘积项.

例 5 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, (a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n)$$

解 根据行列式的定义 1.4,得

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为在 D 的一般项中,只有当 $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \cdots, j_2 = 2$, $j_1 = 1$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零.所以

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上述行列式称为上三角行列式,其特征为主对角线以下的元素全为零,主对角线以上的元素不全为零.例 5 说明上三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积.

作为例 5 的特殊情况,如下行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角行列式**.

例 6　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据行列式的定义 1.4,得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中的各项,除

$$a_{11}a_{2n}\cdots a_{n-13}a_{n2}$$

外,其余全部为零,所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau[1n(n-1)\cdots 2]}n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n! \end{aligned}$$

下面我们不加证明的给出 n 阶行列式的等价表达形式:

定理 1.3　n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的一般项可以表示成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-14}$$

或

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-15}$$

(1-14) 式为列标是自然排列,行标是 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 时的一般项,而(1-15) 式为行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排