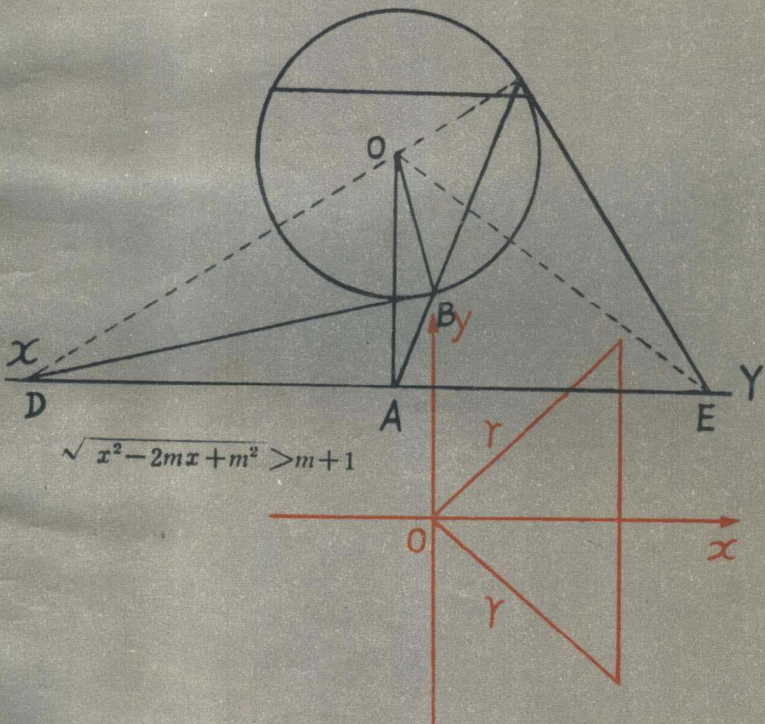
高中

数学教材

补充题

第二册



浙江人民出版社

高中数学教材补充题

（第二册）

谢玉兰　丁宗武　许纪传
钱孝华　江焕棣　陶敏之

浙 江 人 民 出 版 社

高中数学教材补充题
（第二册）
*
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥堍）
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张4.375 字数97,000
1981年11月第 一 版
1981年11月第一次印刷
印数：1—65,000
统一书号：7103·1194
定 价：0.31 元

说　　明

近年来适应读者需要，各类习题集纷纷出版，但要在如此纷繁的题目中精选出适合学生练习的题目，却也得耗费教师学生许多精力和时间。为此，我们从多年积累的大量资料中精选出与现行高中数学教材有密切联系的习题若干，按内容分类编辑，供教师学生选择使用。编选过程中把重点放在加强基础知识和基本技能的训练上，注意习题类型的多样化和内容的新颖，重视综合运用。并本着少而精的原则，选择从严，避免增加学生作业负担，力求对课堂教学和提高学生分析解决问题的能力有所帮助。

全书按教材内容顺序分段编排，其中A组属于基本题，B组略有提高和带有一定的综合性，C组难度较大，系供学有余力的学生练习。教师学生可以根据实际情况灵活选用，不要强求一律。

本书在编选中得到王鎔庚、徐士中老师的热忱帮助，提出许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

一九八一年八月

目　　录

第五章　空间图形

一、直线和平面

（A）

1. 用虚线画出（图 1 ）中的一个平面被另一个平面遮住的那部分的轮廓线.

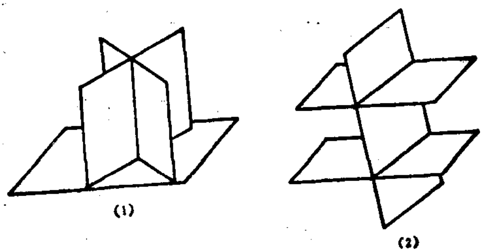


图 1

2. 如图 2，指出下面表示点、直线、平面间位置关系的术语是否正确，如有错误，加以改正.

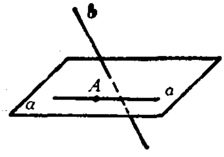


图 2

(1) $A\subset a$；(2) $a\in\alpha$；(3) 点 A 在平面 α 上；

(4) 直线 a 过平面 α；(5) 直线 a 在平面 α 上；

(6) 直线 a 与平面 α 重合；(7) 直线 b 和平面 α 异面.

3．(1) 一个平面内的一点和这个平面外的一点确定一条直线，这条直线与这个平面有几个公共点，为什么？

(2) 空间四点，无三点共线．过每三点可作一平面，最少可作几个平面？最多可作几个平面？

(3) 三条直线相交于一点，过每两条相交直线作一平面，最少可作几个平面？最多可作几个平面？若三条直线相交于两点呢？相交于三点呢？

4．正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$（六个面是全等的正方形）（图3），其棱长 $AB=a$．

若 M、N、P 分别为棱 A_1B_1、B_1B、B_1C_1 的中点，画出过 M、N、P 三点的截面，并求出它的面积．

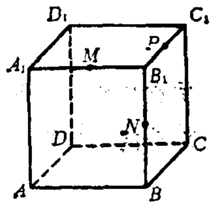


图 3

5．(1) P 为正方体的棱 AA_1 上的点（图4）．连结并延长 B_1P 与 D_1D 延长线交于 Q 点，对吗？如果不正确，那么 B_1P 的延长线与哪一条棱的延长线相交？并画出它们的交点，这个交点就是直线 B_1P 与正方体哪个面的交点？

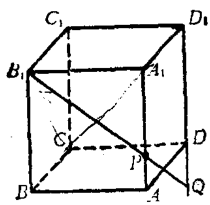


图 4

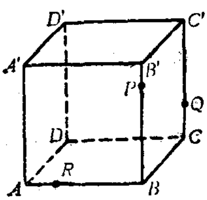


图 5

(2) P、Q、R 分别为正方体棱 BB'、CC'、AB 上的点，且 $PB' \neq QC'$（图5）．画出直线 PQ 和平面 $ABCD$

的交点，再画出直线 PQ 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点，直线 PR 和平面 $ADD'A'$ 的交点，直线 PR 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点；

(3) R、Q 分别为正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AB 和 DC 延长线上的点（$BR\neq CQ$），画出直线 RQ 和平面 $BCC'B'$ 的交点，RQ 和平面 $ADD'A'$ 的交点.

6． 按第一种方法画出下列各图（图 6 ）的水平放置的直观图：

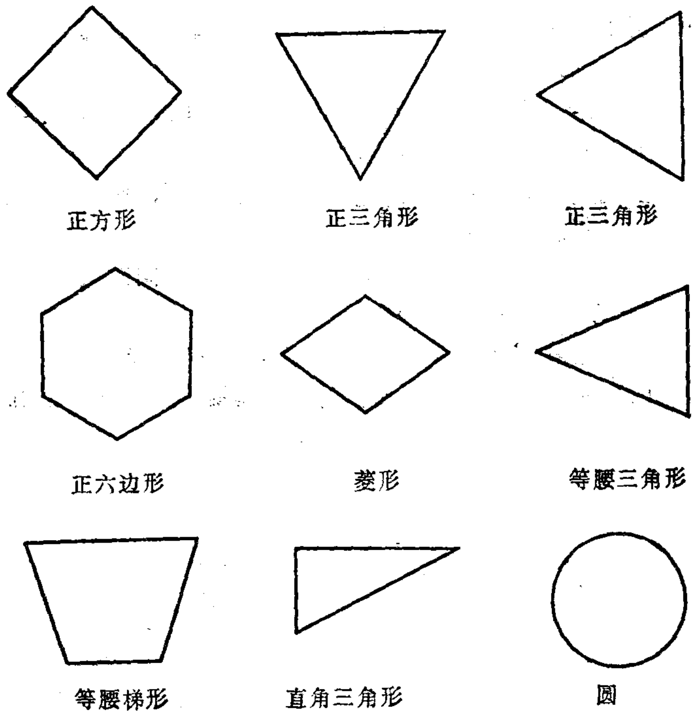


图 6

7. 如果两条直线 a、b 都与第三条直线 c 垂直，那么这两条直线位置关系怎样？并分别画图表示.

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 a，求：

(1) A_1D 与 BC_1 间的距离和它们所成的角的度数；

(2) AB 与 B_1C 间的距离和它们所成的角的度数；

(3) A_1B 与 B_1C 所成的角的度数.

9. 已知 $ABCD$ 是空间四边形，M、N 分别为 AB、CD 的中点. 求证：$MN<\frac{1}{2}(AD+BC)$.

10. 两条直线都和一个平面平行，这两条直线的位置关系如何？试画图表示.

11. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，画出过 B_1、A、C 的截面，并证明 $A_1D\parallel$ 截面 B_1AC.

12. 求证：两个相交平面分别过两条平行直线，则它们的交线和这两条平行直线平行.

13. 平面四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四边上（图 7）. 求证：

(1) 如果 $EH\parallel FG$，则 $EH\parallel BD$，$FG\parallel BD$；

(2) 如果 EH 与 FG 所在的两直线相交，则交点必在直线 BD 上.

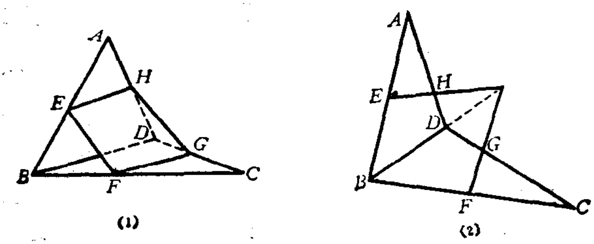


图 7

14．平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O，点 G 在平行四边形外，且 $GA=GC$，$GB=GD$，求证：$GO\perp$ 平行四边形 $ABCD$ 所在平面.

15．已知：不在同一平面内的两个等腰三角形 ABC 和 DBC 有公共的底 BC，连 AD，求证：$BC\perp AD$.

16．从平面外一点引这个平面的垂线和斜线，

求证：(1) 射影等长的两条斜线等长，其逆也真；

(2) 射影较长的斜线较长，其逆也真.

17．在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 分别画出 A_1C 在面 A_1C_1，面 B_1C，面 A_1B 内的射影；

(2) 求出 A_1C 与上述各面所成的角.

18．(1) a、b 是平面 α 外的两条平行直线，问 a、b 在平面 α 内的射影是什么图形？并画图表示；

(2) 若 a、b 是两条相交直线呢？

(3) 若 a、b 是两条异面直线呢？

19．线段 AB 所在的直线与平面 α 斜交成 θ 角，若 AB 在平面 α 内的射影为 $A'B'$，求证：$A'B'=AB\cos\theta$. 并验证当 AB 所在的直线与平面 α 垂直或平行时，上述式子仍然成立.

20．已知：一条线段 AB 的两端点 A、B 和平面 α 的距离分别是 30cm 和 50cm，求分已知线段为 $AP:PB=3:7$ 的点 P 和平面 α 的距离.

21．平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于 O，平面 P 过 BD，$AE\perp$ 平面 P，$CF\perp$ 平面 P，E、F 为垂足（图 8）.

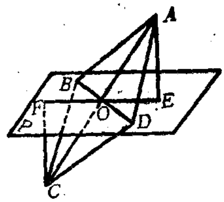


图 8

求证：(1) E、O、F 三点共线；

(2) $AE=CF$.

22. P是 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外的一点，O是P点在平面 α 内的射影。

(1) 若P点到 $\triangle ABC$ 的三个顶点等距离，那么O点是 $\triangle ABC$ 的什么心？

①若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，那么O点应在何处？

②若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，那么O点应在何处？

(2) 若P点到 $\triangle ABC$ 的三边等距离，那么O点是$\triangle ABC$ 的什么心？若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，那么O点应在何处？

(3) 如果 AP、BP、CP 两两互相垂直，那么O点是 $\triangle ABC$ 的什么心？证明你的结论．若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，那么O点应在何处？

23. 如果直角 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外一点P到三个顶点的距离相等，P到平面 α 的距离为 40cm，一直角边 AB 为18cm，求P到另一直角边的距离.

24. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，

求证：

(1) $A_1C\perp C_1B$；

(2) $A_1C\perp$平面 C_1BD.

25. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，

求：(1) D_1 到 AB 的距离；

(2) D_1 到 B_1C 的距离；

(3) A到 A_1C 的距离.

26. 在正四面体（四个面是全等的正三角形）$ABCD$ 中，求棱 AB 和平面 BCD 所成的角.

27．正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点（图9），过 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内引一直线，使它与 A_1C 所成的角最小．

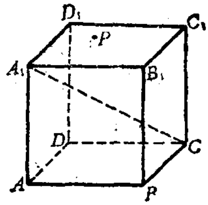


图 9

28．判断下列命题是否正确，若正确，请给以证明；若不正确，试举出反例（可用图表示）：

(1) 如果一个平面内的一条直线平行于另一个平面内的一条直线，那么这两个平面平行；

(2) 平行于同一条直线的两个平面平行，

(3) 平行于同一个平面的两个平面互相平行；

(4) 垂直于同一个平面的两个平面互相平行．

29．(1) 夹在两个平行平面 α、β 间的线段 AB、CD 相交于点 S（图10）．已知 $AS=20\text{cm}$，$BS=30\text{cm}$，$CD=60\text{cm}$，试求 CS 和 DS 的长；

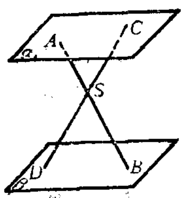


图10

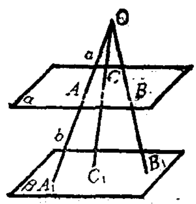


图11

(2) 经过两平行平面外一点 O 引三条直线（图11），这三条直线分别交两已知平面于点 A、B、C 和点 A_1、B_1、C_1，已知 $OA=a$，$AA_1=b$，$B_1C_1=c$，求 BC 的长．

30. 将菱形 $ABCD$ 沿短对角线 AC 折成二面角，并使 D、B 两点间的距离等于 AC.

求证：菱形 $ABCD$ 的四边中点是一个正方形的顶点.

31. (1) 自二面角 $\alpha l\beta$ 的棱上一点 A 在平面 α 内引一条射线 AB，AB 与 l 成45°角，与平面 β 成30°角，求二面角 $\alpha l\beta$ 的度数；

(2) 60°的二面角 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ 内有一点 S，它到两个面的距离都等于 a，求 S 到棱 AB 的距离.

注意：二面角的平面角通常有三种作法：

(1) 直接利用定义：在棱 l 上取一点 A，分别在两个面内作 $AB\perp l$，$AC\perp l$，则 $\angle BAC$ 即为二面角 $\alpha l\beta$ 的平面角（图12）；

(2) 利用三垂线定理：如 P 为二面角 $\alpha l\beta$ 的面 α 上一点，作 $PO\perp\beta$ 于 O，作 $OA\perp l$ 于 A，连 PA，则 $PA\perp l$，$\angle PAO$ 即为二面角 $\alpha l\beta$ 的平面角(图13)；

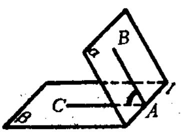


图12

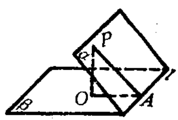


图13

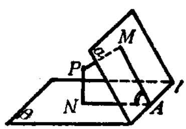


图14

(3) 作棱的垂面：如 P 为二面角内一点，作 $PM\perp\alpha$，$PN\perp\beta$，M、N 为垂足，过 PM、PN 作平面交棱 l 于 A 点，则 $\angle MAN$ 即为二面角 $\alpha l\beta$ 的平面角（图14）.

32. (1) 四边形 $ABCD$ 是矩形，线段 PA 垂直于 $ABCD$ 所在的平面，已知 $AP=a$，$AB=b$，$AD=c$.

求① P 到矩形各顶点的距离，

② $\triangle PBD$ 的面积，

③平面 PBD 与平面 ABD 所成的二面角；

(2) DC 垂直于正三角形 ABC 所在的平面，AD 与平面 ABC 成 β 角，求二面角 $D\text{-}AB\text{-}C$.

33. (1) 平面 α 过 $\triangle ABC$ 的一边 BC，$\triangle A'BC$ 是 $\triangle ABC$ 在 α 内的射影，二面角 $A-BC-A'=\varphi$.

求证：$S_{\triangle A'BC}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\varphi$；

(2) 经过等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 作一平面 α 和 $\triangle ABC$ 所在平面成 θ 角. 已知 $AB=c$，求 $\triangle ABC$ 在平面 α 内的射影所成的三角形的周长和面积.

34. (1) 直角 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 在平面 α 内，AC、BC 分别与平面 α 成 30°、45°角，求平面 α 与 $\triangle ABC$ 所在平面的二面角度数；

(2) 二面角 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ 等于锐角 φ，直角 $\triangle ABC$ 在面 β 内，斜边 AB 在二面角的棱上，BC、AC 分别和面 α 成角 θ_1 与 θ_2，

求证：$\sin^2\varphi=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$.

35. 求正四面体两相邻面所成的角.

36. (1) AC 为圆 O 的直径，B、D 为圆上在 AC 两侧的两点，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，连 SB、SC、SD（图15），试写出图中所有互相垂直的各对平面；

(2) 图16中，$AB\perp$ 平面 α，AC 为平面 α 的斜线，DC

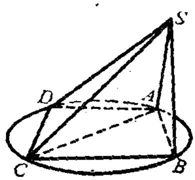


图15

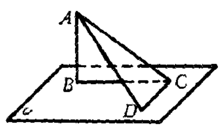


图16

在平面 α 内且垂直于 AC.

求证：平面 $ABC \perp$ 平面 ADC；

(3) 菱形 $ABCD$ 中，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，

求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBD.

37．两圆垂直相交于弦 AB（图17），已知 $AB=l$，两圆的半径分别为 R 和 r，求圆心之间的距离.

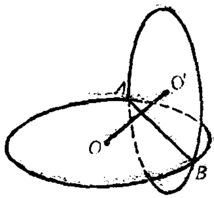


图17

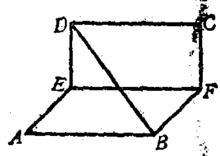


图18

38．(1) 矩形 $ABCD$，$AB=2a$，$BC=3a$，E、F 分别在 AD、BC 上，且 $DE=CF=a$，沿 EF 将 $EFCD$ 折起，使平面 $EC \perp$ 平面 AF（图 18），求 DB 之长及 D 到 BF 的距离；

(2) 矩形 $ABCD$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD，求 A、C 间的距离.

39．把边长为 a 的正 $\triangle ABC$ 按下列要求折转：

(1) 沿着 $\triangle ABC$ 的高 AD 折成 $60°$ 的二面角（图19）；

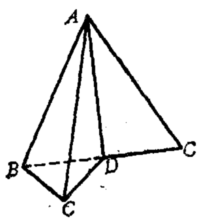


图19

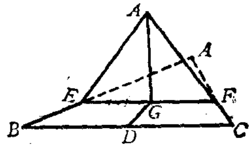


图20

(2) 沿着经过重心 G 且与边 BC 平行的直线，折成直二面角（图20）.

分别求点 A 到 BC 的距离以及 $\angle ABC$ 的度数.

（B）

40. 三个平面把空间分成几部分？画出示意图.

41. 在平面几何中，平行线有如下基本性质："过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行"，试用几种不同的方法证明这个结论在空间也是成立的.

注意：这个结论今后可直接应用.

42. 求证：如一直线与三条平行直线都相交，则这四条直线在同一个平面内.

注意：证明平面图形通常有两种方法：

(1) 先作一个平面，再证明有关的点和线在这个平面内；

(2) 分别过某些点、线作多个平面，再证明这些平面重合.

如本题，设三条平行直线 a、b、c 分别和直线 l 相交，过 b、l 作平面 α，再证明 $a\subset\alpha$，$c\subset\alpha$；也可过 a、b 作平面 α，则 $l\subset\alpha$，过 b、c 作平面 β，则 $l\subset\beta$，再证 α、β 重合.

43. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1C 与截面 DBC_1 交于 O 点，AC、BD 交于 M. 求证：C_1、O、M 三点共线.

注意：在立体几何中，证明三点共线的方法通常是：证明三点是两个相交平面的公共点.

44. 下列判断是否正确，若不正确，试举反例，若正确，请给以证明：

(1) 有一系列直线，其中任意两条直线在同一平面内，那

么这些直线都在同一平面内；

(2) 有一系列直线，其中任意三条在同一平面内，那么这些直线都在同一平面内.

45. (1) 若 $ABCD$ 是空间四边形，求证：它的两条对角线 AC 与 BD 是异面直线；

(2) 直线 a 不在平面 α 内且与 α 有公共点 O，直线 b 在平面 α 内且不过 O 点，求证：a、b 是异面直线；

(3) AB、CD 两直线分别在两个相交平面 α、β 内，并且与 α、β 的交线 l 相交于 B、D 两点. 求证：AB、CD 是异面直线.

注意：证明两直线异面通常用反证法.

46. (1) $ABCD$ 是棱长为 a 的正四面体（图21）.

①试画出相对的棱 AB、CD 的公垂线段，并证明之，

②求异面直线 AB、CD 的距离；

(2) 如四面体两组相对的棱相等，试画出第三组相对棱的公垂线段，并证明你的结论.

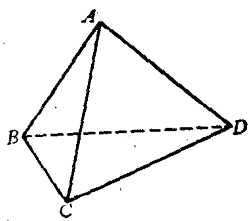


图21

47. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，试分别按下列条件画出正方体的截面：

(1) 过 BC 和 A_1；

(2) 过 A、C、E_1，其中 E_1 是棱 A_1D_1 上的点；

(3) 过 D_1、E、F，其中 E、F 分别是 AB、BC 的中点；

(4) 过 E、F、G，其中 E、F、G 分别为 AB、BC、A_1D_1 的中点.