# 小学数学与逻辑

陈幼民　兰清堂　编著

河南人民出版社

**小 学 数 学 与 逻 辑**

陈幼民　兰清莹　编著

责任编辑　温　光

河 南 人 民 出 版 社 出版

河南第一新华印刷厂印刷

河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米32开本　5.375印张　110千字

1983年11月第1版　1983年11月第1次印刷

印数：　1—10,600册

统一书号7105·386　定价 0.52 元

# 前　言

数学是逻辑性很强的学科。数学知识以逻辑关系组织成为系统，逻辑方法是数学的基本方法。本书简明扼要地介绍了逻辑思维的方法、形式和规律，并以现行小学数学教材为例，朴实具体、通俗易懂地阐述了逻辑在数学教学中的应用，及怎样培养学生的逻辑思维能力。本书内容比较新颖，普及中带提高，可供小学数学教师和师范院校师生参考，亦可供干部、知识青年学习使用。本书第一章至第六章由陈幼民编写，第七章由兰清堂编写。在编写过程中，曾得到魏书莲、于维平、雷秀芝等同志的赞助，特此感谢。

由于我们水平所限，书中如有不当之处，望读者批评指正。

编　者

一九八二年十月

# 目　录

# 第一章 数学与逻辑学

## 一 数学教学与逻辑意义的关系

培养小学生具有初步的逻辑思维能力，历来是小学数学教学的目的之一。

人类的思维是客观现实在人脑中的反映，思维本身的活动，正如所反映的对象一样，也是有规律的。逻辑思维是一种确定的（a就是a，不是b）、前后一贯的(不相矛盾)、有条有理的、有根有据的思维。

为什么把培养学生的逻辑思维能力作为小学数学教学的目的之一呢？

首先这是由数学本身的特点所决定的。数学是一门逻辑性很强、逻辑因素十分丰富的学科。数学的逻辑性强，反映在系统严密、前后连贯上。数学中的许多概念，往往是一个概念的存在又是发展为另一个概念的基础。如乘法建立在加法基础上(乘法是求几个相同加数的和的简便运算)，而其本身又为学习除法、乘方打下基础（除法是乘法的逆运算；乘方是求几个相同因数的积的运算）。因此，不学加法就不可能学乘法；不学乘法，就不可能学除法及乘方。再如学了求最大公约数、最小公倍数、通分、约分，才能学分数的加减乘除等运算；学习面积是从长方形入手，然后再学平行四边

形、三角形、梯形、圆等等。数学的逻辑性强还反映在其研究方法上。数学和其它自然科学的研究方法有所不同，其它自然科学家证明自己的论断可以通过实验，而数学家证明定理通常是用推理和计算。每一个数学定理，必须经过逻辑推理，加以严格证明。数学的这种逻辑的严密性带来了结论的确定性。事实上，数学作为一门系统精确的学问，其中严密的逻辑起了很重要的作用。

其二，教学实践证明，学好数学知识和培养学生的逻辑思维能力有着密不可分、相辅相成的辩证关系。在数学课上，学习数学知识的同时，应该有目的地培养学生的逻辑思维能力；并且，也只有发展了学生的逻辑思维能力，才能更好地掌握数学知识。但是，在实际教学中，有些教师往往只满足于学生多学一些数学知识，而不去培养学生的思维能力，其结果是学生只能死记硬背一些公式和结论进行机械地套用。事实上，只有在学生掌握数学知识的同时，又相应地发展他们的逻辑思维能力，才能将知识学深、学牢、举一反三、灵活运用。教学中，我们常常遇到这样的情况：解答一道复杂的综合应用题，逻辑思维能力强的学生由于思路敏捷，分析综合能力强，往往能较快地从错综复杂的条件中理清思路，抓住主要矛盾，使问题迎刃而解，甚至找到几种解题方法，并能将这些方法用到解同类型的题目中；而逻辑思维能力较差的学生，思路狭窄，对复杂的条件茫然不知所措，他们只能在枝节上兜圈子，找不出解题的途径。例如，求1至1000中所有的偶数之和减去所有的奇数之和的差是多少？因在小学数学中未学过等差数列前 $n$ 项和的公式，思维能力差的同学只有目瞪口呆；而思维能力好的同学却能运用已

学过的交换律、结合律等知识将其巧妙地解出来：

$$
\begin{aligned}
&(2+4+6+\cdots+1000)-(1+3+5+\cdots+999)\\
&=2+4+6+\cdots+1000-1-3-5-\cdots-999\\
&=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(1000-999)\\
&=1\times500\\
&=500。
\end{aligned}
$$

其三，培养逻辑思维能力可以增强学生对知识的理解和记忆，防止遗忘；即使某些知识一时遗忘了，只要稍加复习，很快就能回忆起来，或从所掌握的其它知识中把遗忘的知识推导出来。例如，学习了面积公式以后，只要记住“长方形的面积＝长×宽”，其它面积公式，经过逻辑推理就自然记住了：正方形是长和宽相等的长方形，所以“正方形的面积＝边长×边长”；平行四边形可以割补成长方形，所以“平行四边形的面积＝底×高”；用两个完全一样的三角形可以拼成一个平行四边形，于是“三角形的面积＝底×高÷2”；两个完全一样的梯形可拼成一个平行四边形，且此平行四边形的底就是梯形上底与下底的和，高仍是梯形的高，所以“梯形的面积＝（上底＋下底）×高÷2”；……如此记法，久而不忘；偶有遗忘，即可推出。再如，1里＝（　　）米，如果把换算率忘了，可以从1公里＝2里和1公里＝1000米，推导出1里＝500米的结果。可见具有逻辑思维能力是重要的。

其四，培养学生有较强的逻辑思维能力，就会使他们在学习和实践中，注意观察问题，善于分析问题，能够提出和解决问题。换言之，逻辑思维能力强的同学，相应地创造力和想象力也会较强。譬如，不完全归纳法就能帮助我们比较

迅速地去发现事物的规律，提供研究的线索和方向，从而得出正确的结论，这些结论总结出来就是数学上的定理、性质、法则等。

例如，在教学中我们经常这样进行讲解：

(1) $2+3=5$,

$3+2=5$,

$2+3=3+2$;

(2) $13+25=38$,

$25+13=38$,

$13+25=25+13$;

(3) $1.7+2.39=4.09$,

$2.39+1.7=4.09$,

$1.7+2.39=2.39+1.7$;

………………

引导学生比较上列几组算式，得出加法交换的普遍规律："两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变。"这就是加法交换律。这样学生就在教师引导下，体验了一次从若干现象（此处是算式）中归纳出数学规律的情况。

又如，在讲数的整除与除尽时，有同学提出"$0\div3=0$"能不能叫做整除？教师让学生把"$0\div3=0$"和前面能整除的题目进行比较。相同的地方：除数是自然数，没有余数；不同的地方：这道题的被除数和商是0，是整数而不是自然数。能不能叫做整除呢？教师可以指出："象$0\div3=0$，整数除以自然数，商是整数而没有余数，叫做整除。可是我们现在讲整除是为学习分数作准备，暂时把它限定在自然数范围内讨论，以便在求公倍数时把0排除在外。而象$0\div3=0$这

种情况，将来还会学到。”象这样，在教师引导下，学生通过比较、分析、判断、推理等逻辑思维，找到解答某个问题的几种方法，或者提出不同于教师讲解的思路，就成为创造思维。因此，从小培养学生具有一定的逻辑思维能力，就为将来在数学上有所成就打下良好的基础。

其五，学习近代数学、现代科学技术，更需要具有逻辑思维能力。例如集合论，它是研究数学的一种必不可少的工具。集合论有一套严密的论证方法，它与形式逻辑有密切关系。又如数理逻辑的命题运算，电子计算机的设计框图、排程序等则需要有较强的逻辑思维能力和严格的逻辑训练。同时，学习科学技术、从事科学研究必须掌握一定的科学方法，严格的逻辑推理方法就是其中的一个方面。现代数学、现代科学的飞速发展，人们要学习的知识急骤增多，但是每个人总不能把所有的知识都学完，于是更显示出具备一定的逻辑思维等能力的必要性。为实现四个现代化早出人才，多出人才，小学数学教学大纲把培养学生“具有初步的逻辑思维能力”作为教学目的之一，并强调在“教学中应”“注意逐步培养学生的逻辑思维能力”。

## 二　逻辑学

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。人们在实践活动或理论学习中，力求认识数与形的各种规律，即数学中的公理、定理、性质、法则、公式等。认识，是客观现实在人的头脑中的反映；是在实践活动过程中，在感性材料的基础上，通过思维活动而实现的。所以，认识的过程

由感性认识阶段（即生动直观）和理性认识阶段（即抽象思维）构成。人们的感觉（就是物质对象的个别特性在我们意识中的反映）、知觉（各个物体或现象作为一个整体在我们意识中的反映）等是生动直观的感性认识的基本形式，但只能认识各个事物的现象方面、各个事物的一些片面和表面的联系，而不能深入到事物和现象的内部中去，不能抓住事物和现象的本质与规律；概念、判断、推论、假说、证明等则是人们抽象思维的基本形式，人们通过这些抽象思维对感性材料进一步予以“加工制作”，从而揭露事物和现象的本质和规律。

直观是现实的形象的、直接的反映，而思维则是现实的概括的、间接的反映。逻辑学（形式逻辑）就是研究人类正确思维的初步规律和形式的科学。

在数学教学中培养学生的逻辑思维能力应注意哪些方面呢？主要是：

逻辑思维的方法：比较、分析与综合、抽象与概括等；

逻辑思维的形式：概念、判断和推理；

逻辑论证的方法：分析法与综合法、归谬法和穷举法、数学归纳法；

逻辑思维的初步规律：同一律、不矛盾律、排中律、充足理由律。

等等。

在小学数学教学中怎样培养学生的逻辑思维能力呢？

培养学生的逻辑思维能力，不是一朝一夕之功。数学教材的科学性、系统性是十分强的。如果教师每天精心组织教材，既教基础知识又发展学生的逻辑思维能力，逐渐地就会使学生掌握具有一定深度、广度的科学知识，使他们的思维

活动具有丰富的科学内容，以避免没有根据的瞎思考和违反逻辑的乱推论。详细情况请看下文。

## 三　逻辑思维的方法及其在教学中的应用

为要认识和研究事物的空间形式、数量关系及规律性，我们必须使用一系列的逻辑方法。逻辑思维的方法有比较、分析与综合、抽象与概括等。兹分述如下：

### （一）比较

比较是用以确定对象和现象的相同之点和不同之点的逻辑方法，也是人们进行思维的基础。儿童最初认识形体的大小，物体的多少总是从比较开始的。我们在学习中度量线段的长短就得拿线段与单位长度相比较。学生学习比与比例时通过比较对它们的认识会更清楚、理解更深刻。但是，在比较时还应注意以下几点：

1.彼此间确实有联系的对象才能作比较。

数学是一门系统性很强的学科，许多概念不仅联系紧密，而且容易混淆，如等分和包含；整除和除尽；约数和倍数；奇数和偶数；质数和合数；是几倍和增加了几倍；增加了多少和增加到多少；最大公约数和最小公倍数；长度、面积和体积；正方形、长方形和平行四边形；一堆煤的$\frac{4}{5}$和$\frac{4}{5}$吨；求一数的几分之几和已知一数的几分之几求这数；比和比例；正比例、反比例与似是而非不成比例的量；除法、比和分数等都应在适当时机，引导学生通过比较找出它们的区别和联系，形成正确的概念。

2.应当根据同样一种属性、在同样一种关系上、在同一标准下来比较。

例如，分数、除法、比是三个不同的概念：分数是一个数，除法是一种运算，而比是表示两个数之间的倍数关系。但是这三个概念之间却有着密切的联系。从形式上看，$\frac{a}{b}$既可以看作是一个分数，又可以看作是两个数相除或两个数的比。从意义上看，它们都含有两个数相除的意思。这三个概念在数学中实质上是反映了同一事物。通过上面的比较、分析，就可以使学生更深入地了解分数、除法、比这三个概念的本质。

3.应当根据对象的本质属性来比较，并且新概念本质属性的揭露也往往是在与已有知识进行比较中获得的。

例如，在讲长方形、正方形、平行四边形的相同点和不同点时，我们把它们以红、黄、蓝三种不同颜色的图形（或实物）摆在学生面前，立刻就引起了学生的注意，他们会自发地从不同的角度，观察比较起来。

小学生喜欢比较，但是还不善于比较，有的学生只从颜色、大小、扁平状态等表面现象的区别进行比较。这时就需要在教师引导下，抛开非本质的表面现象，而向着我们解决问题的需要方向进行比较，问题就解决了。

正 方 形  四条边相等，四个角都是直角。

长 方 形  四条边，对边相等，四个角都是直角。

平行四边形  四条边，对边平行，四个角都不是直角。

再如，垂线与斜线的比较，“>”、“<”与“=”的比较，真分数、假分数及带分数的比较，锐角三角形、直角三角形及钝角三角形的比较等都能通过对比揭露其本质属性，获得清晰的概念。

实践证明，许多容易混淆的概念、法则、规律和难以说明的道理，通过直观、对比，都能得到解决。“比较”的确是思维的基础，是掌握知识的一种有力武器，我们要善于用“比较”这一逻辑方法，培养学生的逻辑思维能力。

**（二）分析与综合**

分析是把一个对象分解成若干部分的思维方法；综合是把一个对象的各部分综合成整体的思维方法。在思维过程中，分析与综合往往是不可分割的。在教学过程中，我们往往把一些复杂的概念或问题分成几个组成部分，按照学生已有的知识基础，排列成一个严密的顺序，引导学生由浅入深、由表及里地进行分析，然后再一步一步地综合，以达到解决问题的目的。

例如，3可以分成1和2，这是分析；1和2又组成3，这是综合。

1能平均分成7个$\frac{1}{7}$，这是分析；5个$\frac{1}{7}$又可组成$\frac{5}{7}$，这是综合。这样的分析和综合，就使我们对于数的认识有了发展——将整数扩展到分数。

计算一道题 $(97-15)\div41\times3+19$，先要分析全式，这里既有加减乘除四种运算、又有小括号，于是先作括号内的

运算97－15，再算82÷41×3，最后由6＋19得25，综合而得出结果。

再如，求下面图形阴影部分的面积。（单位：厘米）

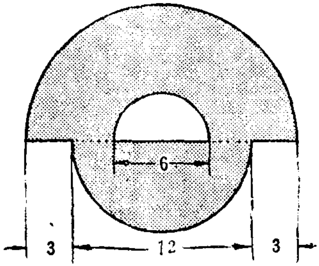


图 1-1

分析知“阴影”是由虚线处所分成的两部分图形所组成：下面是直径为12厘米的一个半圆；而对上面部分再作分析，知道是由直径为（12＋6）厘米的半圆减去直径为6厘米的半圆所组成的图形。综合得出算式：

$$3.14\times\left(\frac{12}{2}\right)^2+3.14\times\left(\frac{12+6}{2}\right)^2-3.14\times\left(\frac{6}{2}\right)^2。$$

对算式的分析和综合应既知其运算顺序，又知其简便算法：

$$原式=3.14\times36+3.14\times81-3.14\times9$$
$$=3.14\times(36+81-9)$$
$$=307.72（平方厘米）。$$

求直圆柱的表面积公式时，分析和综合也给我们开了思路。先作分析，把它分解成上底面积、下底面积、及侧面积，且

上底面积＝下底面积＝$\pi r^2$，

直圆柱侧面积＝底面周长×$h=2\pi r\cdot h$；

综合得出直圆柱的表面积公式：

$$S_{直圆柱全}=2S_{直圆柱底}+S_{直圆柱侧}，$$

或

$$S_{\text{直圆柱全}}=2\pi r^2+2\pi rh。$$

在解决一道复杂的四则应用题时，分析与综合的思维是贯穿始终的。如生产小组加工一批零件，原计划用14天，平均每天加工1500个零件，实际每天加工的零件比原计划每天加工的多$\frac{2}{5}$。问实际用了多少天就完成了这批加工任务？

学生首先要分清题中的条件和问题。

从问题出发，经过分析，可以把原题分成三个简单的问题：

（1）要求的问题是：实际用了多少天完成了这批加工任务？

为要解决这个问题，根据题中的条件，还需要求出两个问题：

（2）实际每天加工的零件数；

（3）这批零件的总数。

然后还要决定解答步骤和选择计算方法，这是在全面分析数量关系的基础上，逐步进行综合的结果。

下面我们从已知条件出发，逐步解决这个问题。经分析、综合，可列算式如下：

（1）这批零件的总数：$1500\times14=21000$（个）；

（2）实际每天加工零件数：$1500\times\left(1+\frac{2}{5}\right)=2100$（个）；

（3）完成这批加工任务实际用的天数：

$$21000\div2100=10（天）。$$

综合列式：

$$(1500\times14)\div\left[1500\times\left(1+\frac{2}{5}\right)\right]$$

$$=14\times\frac{5}{7}=10（天）。$$

可见，整个解答应用题的过程，都是学生进行分析、综合的思维过程，应对学生加以训练。

**（三）抽象与概括**

抽象就是抽取事物的本质属性，使它与其它非本质属性分开；概括就是将同类事物的相同的本质属性集中起来，结合为一般的类的属性。抽象与概括总是紧密联系着的。任何一个数、一个算式、一种符号、一种概念和规律都是抽象、概括的结果。

抽象概括必须建立在大量感性材料的基础上，没有这些感性材料就没有认识的基础。

例如，为了使一年级学生形成数“3”的概念，我们就叫他们数3支铅笔、3个同学、3张课桌、3把钉锤、3个算珠等等，教师引导学生抛开它们的非本质特征：类别、形状、大小、颜色等，而抽象得到它们共同的本质属性——都是有3个单位的物体，从而得到数“3”的概念。

又如，讲解长方形面积的计算时，在学生认识了长方形特征的基础上，让他们测量黑板、课桌及教师画在小黑板上的长方形的面积，然后将这些对象加以比较，分出它们之间所共有的而且是本质的特征：这些物体的表面都是长方形，这些长方形里所含的面积单位的数目，正好等于它的长和宽所含的长度单位的数目相乘的积，把这些特征结合起来，就概括出一个抽象的公式：“长方形的面积＝长×宽”。正是