

21st CENTURY

实用规划教材

21世纪全国应用型本科

计算机系列 实用规划教材



概率论与数理统计

主 编 陈荣江 张万琴
副主编 王天顺 尹景本 杜保建



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

021

211

21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材

概率论与数理统计

主 编 陈荣江 张万琴
副主编 王天顺 尹景本 杜保建
参 编 王秀梅 刘 娟 葛 立



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书的基本思想是讲清概率论与数理统计的基本概念、基本理论,突出基本方法的应用,略去较繁琐的理论推导,力求简洁、清晰地叙述该课程的一些主要概念、产生的背景和方法使用的技巧,既便于学生接受和掌握所学的内容,达到会用的目的,又便于教学。书中例题与习题较丰富,取材时注重启发性和应用性,注重培养学生的基本运算能力,分析问题与解决问题的能力。

全书共 10 章,分 3 个部分。第 1 章至第 5 章为概率论部分,是学习数理统计的必备基础。第 6 章至第 9 章为数理统计部分,主要讲授抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。第 10 章简要介绍 MATLAB 统计工具箱中部分函数的功能和使用方法,读者可结合需要选用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈荣江,张万琴主编. —北京:北京大学出版社,2006.1

(21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材)

ISBN 7-301-10510-X

I. 概… II. ①陈…②张… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材

IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 003445 号

书 名: 概率论与数理统计

著作责任者: 陈荣江 张万琴 主编

责任编辑: 周 欢

标准书号: ISBN 7-301-10510-X/O · 0679

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> <http://www.pup6.com>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667

电子信箱: pup_6@163.com

排 版 者: 北京东方人华北大彩印中心 电话: 62754190

印 刷 者: 河北涿县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.5 印张 468 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 26.00 元

《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》

专家编审委员会

(按姓氏笔画排名)

主 任 刘瑞挺

副主任 胡昌振 段禅伦

崔广才 谢红薇

委 员 叶俊民 杨 璐 陈天煌 范冰冰

陈仲民 胡 明 秦 锋 龚声蓉

《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》

分系列专家编审委员会名单

(按姓氏笔画排名)

计算机应用技术——

主 任 胡昌振

副主任 杨 璐 龚声蓉

委 员 云 敏 马秀峰 李 明 肖淑芬 周松林

杨长生 钟 声 赵忠孝 高 巍

软件开发与软件工程——

主 任 谢红薇

副主任 叶俊民 陈天煌

委 员 王建国 孙 辉 吕海莲 李福亮 何朝阳

张世明 陈佛敏 贺 华 赵绪辉 徐庆生

徐 辉

硬件与网络技术——

主 任 崔广才

副主任 范冰冰 胡 明

委 员 龙冬云 冯嘉礼 曲朝阳 汤 惟 张有谊

董春游 程小辉

专业基础课——

主 任 段禅伦

副主任 陈仲民 秦 锋

委 员 王昆仑 王 虹 仇 汶 田敬军 刘克成

朴春慧 吴晓光 苏守宝 陈付贵 咎风彪

谭水木 魏仕民

信息技术的应用化教育

(代丛书序)

刘瑞挺/文

北京大学出版社第六事业部组编了一套《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》。为了做好这项工作，他们制订了详细的编写目的、丛书特色、内容要求和风格规范。在内容上强调面向应用、任务驱动、注重实例分析、培养能力；在风格上力求文字精练、脉络清晰、图表丰富、版式明快。

一、组编过程

2004 年 10 月，该部开始策划教材丛书，派出编辑分别深入各地高校，了解教学第一线的情况，物色合适的作者。2005 年 4 月 16 日在北京大学召开了“《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》研讨会”。来自全国 73 所院校的 102 位教师汇聚一堂，共同商讨应用型本科计算机系列教材建设的思路，并对规划选题进行了分工。2005 年 7 月 21 日在青岛又召开了“《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》审纲会”。编审委员会成员和 46 个选题的主编、参编，共 100 多位教师参加了会议。审稿会分专业基础课、软件开发与软件工程、硬件与网络技术、计算机应用技术等小组对大纲及部分稿件进行了审定，力争使这套规划教材成为切合当前教学需要的高质量精品教材。

二、转变观念

为了搞好这套教材，要转变一些重要的观念。

首先，需要转变的观念就是大学及其培养人才的定位。大学并不都是“研究型”的，每个大学生不一定都当科学家。事实上，大多数学校应该是“应用型”的，大学生将直接进入社会基层、生产一线、服务前沿，成为各行各业的实践者和带头人。

其次，应该转变的观念就是教材建设的思路。许多人偏爱于“研究型”的教材，即使写“应用型”教材，也多半是对前者进行删繁就简、避虚就实，这样还不能产生真正“应用型”的教材。因此，以“学科”为中心、追求雄厚“理论基础”的传统应该被以“应用”为导向、追求熟练“实践技能”的思路所取代。

第三，必须转变对计算机技术的认识。20 年前，有人把计算机技术理解为 BASIC 编程；10 年前，有人把 Windows 95 和 Word 称为计算机文化；今天，中小学陆续开出《信息技术》课，有人对此怀疑观望，其实它意义深远。以计算机为核心的信息技术，今后 20 年的发展主题将是在各个领域的应用普及。大学计算机应用型本科的教材建设应该面向信息技术的深入应用，而不是相反，因为信息时代已经不是遥远的未来。

三、信息技能

以计算机为核心的信息技术，从一开始就与应用紧密结合。例如，ENIAC 用于弹道计算，ARPANET 用于资源共享以及核战争时的可靠通信。即使是非常抽象的图灵机模型，也

与第二次世界大战时图灵博士破译纳粹密码的工作相关。

今天的信息技术有三个重要的特点：

第一，信息技术是计算机与通信技术融合的辉煌成果。长期以来，计算机技术和通信技术并行不悖地独立发展。20 世纪后半叶，两者相互渗透，产生了程控电话、数据通信、网络技术、高清晰电视，世界各国构建了全球的、宽带的、网站密布的信息高速公路，出现了无处不在的手机通信和移动办公系统、随身听、数码摄录相机、家庭影院、智能控制系统，还有越来越多的嵌入式系统。人们的工作方式和生活方式都发生了质的飞跃。

第二，信息技术与各行各业紧密结合。我国的职业门类有：农林牧渔、交通运输、生化与制药、地矿与测绘、材料与能源、土建水利、制造、电气信息、环保与安全、轻纺与食品、财经、医药卫生、旅游、公共事业、文化教育、艺术设计传媒、公安、法律，这些门类都需要信息技术。

第三，在发展初期，以计算机为核心的信息技术是一项专门技术，只有专家才需要它、才能掌握它，在专家与平民之间有很深的“信息鸿沟”。今天，信息技术已经不再是只有专家才需要、才能掌握的专门技能，而是普通人都需要、也都能掌握的基本信息技能。但是，“信息鸿沟”也迁移到普通人之间。具有信息优势的学生能良性循环，强者更强。

有了这样广阔的应用信息背景，再造计算机应用型本科的课程体系就有了基础。

四、能力结构

关于应用型计算机人才的能力结构，我们不用“宫殿”模型，而用“雄鹰”模型。前者是建筑学模型，适合描述学科；后者是生物学模型，适合描述人才。“雄鹰”模型包括主体、两翼、头部、尾部等，它有可成长性。

首先，数据是信息技术的主体，数据技术是基本功。通常，数据包括文字、公式、表格、图形、图像、动画、声音、视频等等。因此，你不仅要会录入文章、绘制图表，还应该会采集音乐、编辑视频。大家面对的是多媒体数据，应该能收集它、整理它，数据经过整理就成为有用的信息。

其次，信息技术的两翼是数据库技术和网络技术。为了管理好、使用好数据，就必然用到数据库技术，数据库技术是一切信息管理的基石。为了分享数据和信息，就需要网络技术。有了上述数据主体技术和两个“翅膀”，你应该可以起飞了。

但是能飞多高，能飞多远，还应该编程技术、智能技术、安全技术的支持。这相当于头尾各部分的作用。编程将使大家的信息技能游刃有余。人工智能使你飞得更远，安全技术能使你飞得更稳。

有人可能会责难我们，难道大学本科生还需要学习办公软件的技能吗？他们认为这是让人“笑掉大牙”的事。其实，办公软件是最重要的提高生产效率的应用软件，很容易使用，但各人使用效率的高低则十分悬殊。我们设想，今后大学生在入学前先学会计算机的基本操作，我们再开一门高级办公技术的课，通过严格的行业及个人行为规范，对学生进行应用化训练，养成正确的职业习惯。将来工作时能提高效率、改善质量、降低成本。这决不是貽笑大方的事。

五、初步规划

应用型本科教材的规划是一个长期的战略任务，不是短期的战术行为。因此，目前的规划教材不可能一步到位，还会保留一些传统的基础课。例如，数字电路与逻辑设计、微机原理及接口技术、单片机原理及应用等。即使是纯硬件专业的学生，如何学这些传统硬件课都值得商榷，更何况公共基础课。

我们将分门别类逐步建设好应用型本科的重点课程和教材：

- (1) 基础类教材：信息技术导论，计算机应用基础，高级办公技术，数据与操作，密码与安全，实用数据结构，实用离散数学……；
- (2) 数据库类教材：数据库原理与应用，信息系统集成，数据采掘与知识发现……；
- (3) 网络类教材：计算机网络，因特网技术，网络管理与安全，网站与网页设计……；
- (4) 编程类教材：面向对象程序设计，C++程序设计，Java 程序设计……；
- (5) 提高类教材：软件工程原理及应用，人工智能原理及应用……。

新教材要体现教育观念的转变，系统地研究普通高校教学改革的需求，优先开发其中教学急需、改革方案明确、适用范围较广的教材。注重规划教材的科学性、实用性、易学性，尽量满足同类专业院校的需求。教材内容应处理好传统与现代的关系，补充新知识、新技术、新工艺、新成果。

我相信北京大学出版社在全国各地高校教师的积极支持下，精心设计，严格把关，一定能够建设一批符合应用型人才培养目标的、适应计算机应用型人才培养模式的系列精品教材，而且能建设一体化设计、多种媒体有机结合的立体化教材，为各门课程配套电子教案、学习指导、习题解答、课程设计等辅导资料。让我们共同努力吧！

刘瑞挺教授 曾任中国计算机学会教育培训委员会副主任、教育部理科计算机科学教学指导委员会委员、全国计算机等级考试委员会委员。目前担任的社会职务有：全国高等院校计算机基础教育研究会副会长、全国计算机应用技术证书考试委员会副主任、北京市计算机教育培训中心副理事长。

本系列教材编写目的和教学服务

《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》在全国的各位编写老师的共同辛勤努力下，在编委会主任刘瑞挺教授和其他编审委员会成员的悉心指导下，经过北京大学出版社第六事业部各位编辑的刻苦努力，终于与师生们见面了。

教材编写目的

目前，我国高等教育正迎来一个前所未有的发展机遇期。高等教育的发展已进入到一个新的阶段。高等本科院校也逐渐演变成“研究型、学术型”和“应用型、就业型”两类。

作为知识传承载体的教材，在高等院校的发展过程中起着至关重要的作用。但目前教材建设却远远滞后于应用型人才培养的步伐，许多院校一直沿用偏重于研究型的教材，应用型教材比较缺乏，这势必影响应用型人才的培养。

为顺应高等教育普及化迅速发展的趋势，配合高等院校的教学改革和教材建设，坚持“因材施教”的教学原则，注重理论联系实际，全面促进高等院校教材建设，进一步提高我国高校教材的质量，北京大学出版社大力推出高校“应用型本科”各专业相关教材。本系列教材不仅讲解基础理论技术，更突出工程实际应用，注重技术与应用的结合。

本套计算机系列教材的编写思想主要如下：

- (1) 要符合学校、学科的计算机课程设置要求。以高等教育的培养目标为依据，注重教材的科学性、实用性、通用性，尽量满足同类专业院校的需求。
- (2) 要定位明确。要准确定位教材在人才培养过程中的地位和作用，正确处理系列教材与系列课程、读者层次的关系，面向就业，突出应用。
- (3) 合理选材和编排。教材内容应处理好传统内容与现代内容的关系，大力补充新知识、新技术、新工艺、新成果。根据教学内容、学时、教学大纲的要求，制定模块化编写体例，突出重点、难点。
- (4) 体现建设“立体化”精品教材的宗旨。提倡为主干课程配套电子教案、学习指导、习题解答、课程设计、毕业设计等教学配套用书。

教学服务

1. **提供教学资源下载。**本系列大部分教材中涉及到的实例（习题）的原始图片和其他素材或者是源代码、原始数据等文件，都可以在相关网站上下载。每本教材都配有 PPT 电子教案，老师可随时在网络上下载并可修改为适合自己教学的 PPT。

2. **提供多媒体课件和教师培训。**针对某些重点课程，我们配有相应的多媒体课件，对大批量使用本套教材的学校，我们会免费提供多媒体课件。另外，我们还将免费提供教师培训名额，不定期组织老师进行培训。

3. **欢迎互动。**欢迎使用本系列教材的老师和同学提出意见和建议，有建设性的将给予奖励；同时有教材或者专著出版要求的老师，请与我们联系。

北京大学出版社第六事业部(<http://www.pup6.com>)

前 言

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支,在自然科学、经济管理和工程技术的各个领域都得到广泛的应用,特别是随着计算机的迅速普及和高效科学计算软件的推广应用,概率统计在经济管理、金融保险、物理、生物等众多领域内起着越来越重要的作用,它的理论和方法已经也必将更加广泛地渗透到有关专业的后续专业课程之中。正是概率统计的这种广泛应用性,使它成为理工科专业重要的数学课程之一,它的内容和方法已成为理工科专业学生必备的数学基础。本书是以教育部最新颁布的高等学校工科数学教学基本要求为依据,结合多年教学实践经验编写的,可作为高等学校理工、经管等专业概率统计课程的教材,也可供工程技术人员参考。

全书共10章,分3个部分。第1章至第5章为概率论部分,它是学习数理统计的必备基础。第6章至第9章为数理统计部分,主要讲授抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。第10章简要介绍MATLAB统计工具箱中的部分函数的功能和使用方法,读者可结合需要选用。

我们编写本书的基本思想是注重基本概念、基本理论,突出基本方法的应用,略去较繁琐的理论推导,力求简洁、清晰地叙述该课程一些主要概念、产生的背景和方法使用的技巧,既便于学生接受和掌握所学的内容,达到会用的目的,又便于教学。书中例题与习题较丰富,取材时注重启发性和应用性,注重培养学生的基本运算能力,分析问题与解决问题的能力。本书特点是:

(1) 尽量使用较少的数学知识(只限高等数学和线性代数),不拘泥于繁琐的数学论证,略去了个别需要较强理论基础的定理的证明过程,只给出定理的直观解释及其重要意义。

(2) 注重对基本概念的产生背景、理论涵义及其在应用上的意义给予解释,以帮助读者正确领会概念的内涵。

(3) 每章前面简要列出所讲主要内容和教学目标要求,突出教学重点。

(4) 简要介绍了MATLAB统计工具箱中的部分函数,有效激发学生的学习积极性,提高学习效率,培养学生应用统计处理实际问题的技能。

本书的编写分工如下:第1章由张万琴(河南科技学院)编写,第2章由刘娟(河南科技学院)编写,第3章由尹景本(河南科技学院)编写,第4章由杜保建(安阳师范学院)编写,第5章和第7章由王秀梅(河南机电专科学校)编写,第6章、第8章和习题的参考答案及附录由陈荣江(河南科技学院)编写,第9章由王天顺(青岛科技大学)编写,第10章由葛立(河南科技学院)编写。最后由陈荣江、张万琴负责统稿。陈付贵教授、郭运瑞教授审阅了全稿并提出了许多宝贵意见。同时,本书的编写得到北京大学出版社、河南科技学院教务处和数学系以及有关兄弟院校的关心和支持,在此一并致谢。

由于编者能力有限,加上时间仓促,书中不妥之处在所难免,恳请教学同仁和广大读者不吝赐教。

编 者

2005.11.1

目 录

第 1 章 随机事件与概率 1	
1.1 随机事件..... 1	
1.1.1 必然现象与随机现象 1	
1.1.2 随机试验与随机事件、 样本空间 2	
1.1.3 事件之间的关系与运算 3	
1.2 频率与概率..... 6	
1.2.1 频率及其性质 6	
1.2.2 概率的统计定义 7	
1.2.3 概率的公理化定义 8	
1.3 等可能概型..... 10	
1.3.1 古典概型 10	
1.3.2 几何概型 15	
1.4 条件概率..... 16	
1.4.1 条件概率的定义 16	
1.4.2 乘法公式 17	
1.4.3 全概率公式 19	
1.4.4 贝叶斯公式 21	
1.5 事件的独立性..... 22	
1.5.1 事件的独立性 22	
1.5.2 重复独立试验 二项概率公式..... 26	
1.6 习题..... 29	
第 2 章 随机变量及其分布 34	
2.1 随机变量及其分布函数..... 34	
2.1.1 随机变量 34	
2.1.2 随机变量的分布函数 35	
2.2 离散型随机变量及其概率分布..... 36	
2.2.1 离散型随机变量 及其分布律 36	
2.2.2 离散型随机变量 的常用分布 38	
2.3 连续型随机变量及其概率分布..... 42	
2.3.1 连续型随机变量及其 概率密度函数 42	
2.3.2 连续型随机变量 的常见分布 46	
2.4 随机变量函数的分布..... 53	
2.4.1 离散型随机变量 函数的分布 53	
2.4.2 连续型随机变量函数的分布 54	
2.5 习题..... 57	
第 3 章 多维随机变量及其分布 62	
3.1 二维随机变量及其分布函数..... 62	
3.1.1 二维随机变量 62	
3.1.2 二维离散型随机变量 63	
3.1.3 二维连续型随机变量 65	
3.2 边缘分布..... 68	
3.2.1 边缘分布函数 68	
3.2.2 二维离散型随机向量 的边缘分布 69	
3.2.3 二维连续型随机向量 的边缘概率密度函数 69	
3.3 条件分布..... 72	
3.3.1 二维离散型随机变量 的条件分布 72	
3.3.2 二维连续型随机变量 的条件分布 74	
3.4 随机变量的独立性..... 78	
3.4.1 两个随机变量的独立性 78	
3.4.2 多维随机变量的独立性 80	
3.5 两个随机变量的函数的分布..... 81	
3.5.1 两个离散型随机变量 的函数的分布 81	
3.5.2 两个连续型随机变量 的函数的分布 82	
3.6 习题..... 89	

第 4 章 随机变量的数字特征	94	7.3 区间估计	153
4.1 随机变量的数学期望	94	7.3.1 区间估计的概念	153
4.1.1 离散型随机变量的数学期望	94	7.3.2 单个正态总体参数	
4.1.2 连续型随机变量		的区间估计	154
的数学期望	97	7.3.3 两个正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$	
4.1.3 随机变量函数的数学期望	99	的区间估计	157
4.1.4 数学期望的性质	100	7.3.4 两个正态总体方差比	
4.2 方差	102	σ_1^2/σ_2^2 的区间估计	158
4.2.1 方差的概念	102	7.3.5 单侧置信区间	160
4.2.2 常见分布的方差	103	7.3.6 非正态总体的区间估计	161
4.2.3 方差的性质	106	7.4 习题	163
4.3 协方差和相关系数	109	第 8 章 假设检验	168
4.3.1 协方差	109	8.1 假设检验的基本概念	168
4.3.2 相关系数	110	8.1.1 统计假设	168
4.4 矩、协方差矩阵	112	8.1.2 检验法则	168
4.5 习题	114	8.1.3 两类错误	169
第 5 章 大数定律与中心极限定理	119	8.1.4 显著水平为 α 的检验方法	169
5.1 大数定律	119	8.1.5 假设检验的基本程序	170
5.2 中心极限定理	122	8.2 正态总体参数的假设检验	171
5.3 习题	126	8.2.1 单个正态总体均值的检验	171
第 6 章 样本及抽样分布	128	8.2.2 单个正态总体方差的检验	174
6.1 总体与样本	128	8.2.3 两个正态总体均	
6.1.1 总体	128	值差的检验	176
6.1.2 简单随机样本	128	8.2.4 配对数据的显著性	
6.2 抽样分布	130	检验(t 检验)	178
6.2.1 统计量	130	8.2.5 两个正态总体方差比 σ_1^2/σ_2^2	
6.2.2 抽样分布	132	的假设检验(F 检验)	179
6.2.3 正态总体的样本均值		8.2.6 大样本情形总体均值检验	181
与样本方差的分布	136	8.3 非参数假设检验	182
6.3 习题	139	8.3.1 离散型随机变量分布律	
第 7 章 参数估计	142	的拟合优度检验	182
7.1 点估计	142	8.3.2 连续型随机变量的概率分布	
7.1.1 频率替代法	142	的拟合优度检验	184
7.1.2 矩估计法	143	8.3.3 独立性检验	186
7.1.3 最大似然估计法	145	8.4 习题	190
7.2 估计量的优良性准则	149	第 9 章 方差分析与回归分析	194
		9.1 单因素试验的方差分析	194
		9.1.1 问题的提出	194

9.1.2 单因素试验的数学模型	195	语句结构	233
9.1.3 平方和的分解	196	10.1.2 矩阵运算	235
9.1.4 S_E , S_A 的统计特征	197	10.1.3 MATLAB 语言的	
9.1.5 假设检验问题的拒绝域	199	流程结构	237
9.1.6 未知参数的估计	200	10.1.4 二维图形绘制	239
9.1.7 多重比较	202	10.2 MATLAB 在概率论与数理统计	
9.2 双因素试验的方差分析	204	中的应用	240
9.2.1 双因素等重复试验		10.2.1 常见的随机变量及其	
的方差分析	204	概率分布	240
9.2.2 双因素无重复试验		10.2.2 随机数的产生和随机	
的方差分析	209	变量的数字特征	244
9.3 一元线性回归	212	10.2.3 参数估计函数	246
9.3.1 一元线性回归的数学模型	212	10.2.4 假设检验函数	248
9.3.2 可线性化的曲线回归	221	10.2.5 回归分析	250
9.4 多元线性回归简介	223	10.2.6 方差分析	254
9.5 习题	230	10.3 习题	260
第 10 章 MATLAB 在统计建模		附表	262
中的应用	233	参考答案	282
10.1 MATLAB 软件简介	233	参考文献	295
10.1.1 MATLAB 的基本			

第1章 随机事件与概率

教学提示：概率论是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支。革命导师恩格斯说过：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”概率论的任务就在于揭露与研究随机现象的规律性。本章首先阐明了在大量重复试验中随机事件的频率的稳定性，从而引出随机事件的概率的概念。然后叙述概率的古典定义、概率的性质、条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式以及事件的独立性，最后讲述独立试验序列中的二项概率。

教学目标：通过本章的学习要求学生理解事件概率、事件的互斥性和独立性的概念，熟练掌握概率的性质，能运用概率的加法定理、乘法定理、全概率公式、贝叶斯公式、独立试验序列中的二项概率公式计算随机事件的概率。

1.1 随机事件

1.1.1 必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定性现象**。必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的。例如：在标准大气压下，水被加热到 100°C 必然沸腾；两个同性的电荷一定互斥；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动等，这些现象都是必然现象。随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象；对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的。例如：出生前对新生儿性别判定；抛掷一枚质地均匀的硬币，硬币落地后的结果是否带国徽的一面朝上；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是正品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果可能不相同等，这些现象都属于随机现象。

虽然随机现象在一定条件下，可能出现这样或那样的结果，而且在每一次试验或观察之前不能预知这一次试验的确切结果，但人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性。例如：掷一枚质地均匀的硬币，当投掷次数很多时，就会发现出现正面和反面的次数几乎各占一半；又如，对一个目标进行射击，当射击次数较少时，弹孔的分布没有明显的规律性，但当射击次数非常多时，就会发现弹孔的分布呈现一定的规律性：即弹孔关于目标的分布略呈对称性，且愈靠近目标的弹孔愈密，愈远离目标的弹孔愈稀；再如，调查多户家庭，其消费水平呈现“两头少，中间多”的状况，即处于中间状态的家庭占多数。

这种在每次试验中呈现不确定性，而在大量重复试验中又呈现某种统计规律性的现象

叫**随机现象**。概率统计就是研究和提示随机现象统计规律性的一个数学分支，它被广泛地应用于自然科学及社会科学的诸多领域中。

1.1.2 随机试验与随机事件、样本空间

对随机现象进行研究时，人们通常要进行大量的观察、试验。如果试验具有以下三个特点，则称之为**随机试验**。

- (1) 可以在相同条件下重复进行。
- (2) 试验结果不止一个，且可以预知一切可能的结果的取值范围。
- (3) 试验前不能确定会出现哪一个结果。

随机试验是一种含义较广的术语，它包括对随机现象进行观察、测量、记录或做科学试验等。随机试验也简称为**试验**，记为 E 。以后所提到的试验都是指随机试验。

在随机试验中可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**，简称**事件**。

在一个试验中，不论可能的结果有多少个，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

- (1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果。
- (2) 任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成。

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件，称为**基本事件**，或称为**样本点**，记为 e 。

随机试验 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S 。

随机事件可表述为样本空间中样本点的某个集合，常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。显然，一切事件均可分解为若干基本事件的和，而基本事件不可再分。所谓**事件 A 发生**，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的某个样本点出现。

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**。样本空间 S 包含所有的样本点，每次试验它必然发生，因此，它是一个必然事件。必然事件用 S 表示，它是样本空间 S 的一个子集。在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\emptyset$ 。它是样本空间 S 的一个空子集。

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究方便，把它们作为随机事件的两个极端情形来处理。

下面是一些试验的例子。

E_1 ：掷一颗骰子，观察所掷的点数是几。

E_2 ：工商管理部门抽查市场某些商品的质量，检查商品是否合格。

E_3 ：观察某城市某个月内交通事故发生的次数。

E_4 ：对某只灯泡做实验，观察其使用寿命。

E_5 ：对某只灯泡做实验，观察其使用寿命是否小于 200 小时。

这里所举的 5 个试验中，若以 S_i 表示试验 E_i 的样本空间 ($i=1,2,3,4,5$)，则

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$S_2 = \{\text{合格品}, \text{不合格品}\}.$$

$$S_3 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$$S_4 = \{t, t > 0\}.$$

$$S_5 = \{\text{寿命小于 200 小时}, \text{寿命不小于 200 小时}\}.$$

需要说明的是：在 E_3 中，虽然每个城市每个月内发生交通事故的次数是有限的，不会非常大，但一般说来，人们从理论上很难定出一个交通事故次数的有限上限。为了方便，我们把上限视为 ∞ 。同样，在 E_5 中我们也作了类似的处理。这样的处理方法在理论研究中经常被采用。

【例 1.1】 掷一颗骰子，用 $A_1=\{1\}, A_2=\{2\}, \dots, A_6=\{6\}$ 分别表示所掷的结果为“一点”至“六点”， B 表示“偶数点”， C 表示“奇数点”， D 表示“四点或四点以上”。若试验的目的是观察所掷的点数是几，试写出样本空间；指出 $A_1, A_2, \dots, A_6, B, C, D$ 事件中哪些是基本事件；表示事件 B, C, D 。

解 投掷后可能有 6 种不同的结果 $A_1, A_2, \dots, A_6$ ，样本空间 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ； $A_1, A_2, \dots, A_6$ 都是基本事件； $B=\{2, 4, 6\}$ ， $C=\{1, 3, 5\}$ ， $D=\{4, 5, 6\}$ 。

【例 1.2】 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数，写出这个试验的样本空间、基本事件；若设 A = “呼叫次数不超过 3 次”， B = “呼叫次数大于 5 次”，表示事件 A, B 。

解 因在这个试验中难以规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间是 $S=\{0, 1, 2, \dots\}$ 。这个试验的基本事件是 $C_i=\{i\} (i=0, 1, 2, \dots)$ 。 $A=\{0, 1, 2, 3\}$ ， $B=\{6, 7, \dots\}$ 。

【例 1.3】 将一枚均匀对称的硬币掷两次，观察正反面出现的情况，写出此试验的样本空间；若设 A = “两次掷出朝上的面相同”， B = “两次掷出朝上的面至少有一个正面”，表示事件 A, B 。

解 样本空间 $S=\{(\text{反}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{正})\}$ 。 $A=\{(\text{反}, \text{反}), (\text{正}, \text{正})\}$ ， $B=\{(\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{正})\}$ 。

根据事件发生的意义，在例 1.1 中，当投掷的结果为“4 点”时，事件 A, B, D 均发生。

1.1.3 事件之间的关系与运算

随机事件是一个集合，因此事件之间的关系与运算可以按集合论中的处理，但应根据“事件发生与否”给出它们在概率论中的提法。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生则导致事件 B 发生，即 A 中每个样本点都属于 B ，则称 A 含于 B 或 B 包含 A ，记为 $A \subset B$ 。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

易知 $A \subset B$ 等价于若 B 不发生则 A 必不发生。对于任何事件，有 $\emptyset \subset A \subset S$ 。

2. 事件的和(并)

设 A, B 为两事件，则称事件“ A 发生或者 B 发生”为 A 与 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$ 。它是由 A, B 中一切样本点共同组成的集合。

一般地， n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ，可数个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，它们都表示所列诸事件中至少有一个发生。

3. 事件的积(交)

设 A, B 为两事件，则称事件“ A 与 B 都发生”为 A 与 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB 。

它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合。

一般地, n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 可数个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 它们都表示所列诸事件全发生。

4. 事件的差

设 A, B 为两事件, 则称事件 “ A 发生但 B 不发生” 为 A 与 B 之差事件, 记为 $A-B$ 。这是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合。

例如, 在例 1.3 中, $A-B = \{(\text{反}, \text{反})\}$ 。

5. 互斥(不相容)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 为互斥事件, 或互不相容事件, 这时 A 与 B 没有公共的样本点。显然, 不同的基本事件是互不相容的。

6. 互逆(对立)事件

设 A, B 为两事件, 若 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$, 则称 A 与 B 为互逆事件, 或对立事件, 这时 B 叫做 A 的逆事件, 记为 $\bar{A}$, 即 A 不发生。显然, 这时有 $B = \bar{A}$, $A = \bar{B}$, $\bar{\bar{A}} = A$ 。易知, 若 A, B 是任意两事件, 则

$$A \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = S, A - B = A \bar{B}, \bar{\bar{A}} = A$$

由定义知, 对立事件必为互不相容事件, 反之, 互不相容的两个事件未必为对立事件。以上事件之间的关系与运算可以用文氏图来直观地表示。若用平面上的一个矩形表示样本空间 S , 矩形内的点表示基本事件, 圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B , 则 A 与 B 的各种关系及运算如图 1.1~图 1.6 所示。

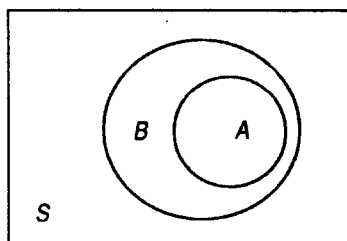


图 1.1

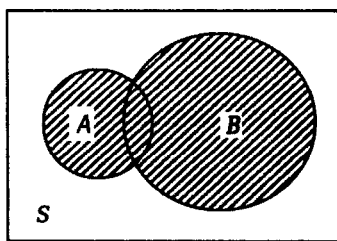


图 1.2

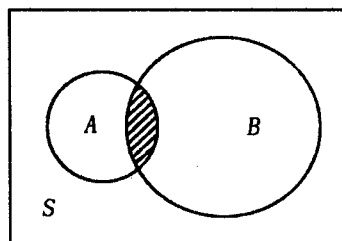


图 1.3

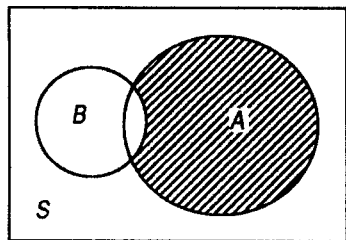


图 1.4

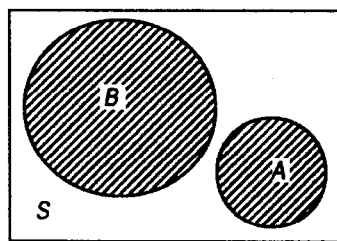


图 1.5

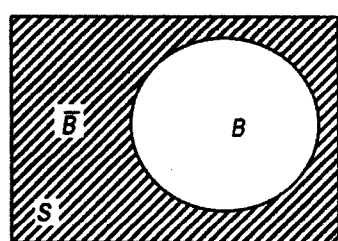


图 1.6