考研

2001年版

特别快车

——数学

华中科技大学数学系 编

华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

考研特别快车
——数学

（2001 年版）

华中科技大学数学系　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研特别快车——数学(2001年版)/华中科技大学数学系编
武汉:华中科技大学出版社, 2001年7月
ISBN 7-5609-2204-X

Ⅰ.考…
Ⅱ.编…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.O13

考研特别快车——数学
(2001年版)　　华中科技大学数学系　编

责任编辑:龙纯曼　　封面设计:刘　卉
责任校对:蔡晓瑚　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

经　销:新华书店湖北发行所

录　排:华中科技大学出版社照排室排版
印　刷:湖北省通山县印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:13.375　字数:321 000
版次:2001年7月第2版　印次:2001年7月第2次印刷　印数:4 001—7 500
ISBN 7-5609-2204-X/O.215　定价:17.50元

内 容 提 要

本书依据最新考试大纲，分析历年试卷特点，总结辅导与评卷工作经验而编写. 全书由微分学、积分学、级数与微分方程、线性代数、概率统计五个部分及附录(历年试卷及基本公式汇集)构成. 各部分均以问题为纲，围绕各类题型介绍相关知识与解题方法，特别注重方法的综合性、实用性与快捷性. 全书共有 1000 道习题，其中每类题均有解法示范.

本书篇幅不大，内容精练而实用，可供报考研究生的考生(工学及经济学)复习使用.

前　言

亲爱的年青读者！你已捧于手中的这本书，是我们热诚奉献给你的新世纪礼物．在你开卷之初，让我们轻松地交谈一番吧．

你无疑是令人羡慕的幸运者．当你在众多学子的激烈竞争中脱颖而出，肩负师友与双亲的重托，踌躇满志地踏入大学校门之际，在你眼中的未来，唯有阳光与鲜花．你将作为当代青年的佼佼者，为国家建设充当栋梁之材．就在你志满意得、浮想联翩之际，时代前进的步伐猛然加快了．你大概不无惊喜地发现，几乎在一夜之间，大学奇迹般地扩大了．你的弟弟妹妹们，昨天还在为抢过狭窄的升学独木桥而苦恼万分，今天则有望通过一条宽阔得多的大道欢畅地奔入大学！升入大学再也不是一件高不可攀的艰难壮举了．当你看到我国高等教育以两位数的高速度急剧发展，当你目睹一些发达的中心城市率先迈人普及高等教育的时代时，你不会为国家的进步、为未来一代的幸运而欢欣鼓舞、激动万分吗？你在欢庆之余，大概也会隐约感到：原来想象中那样金光灿灿的大学本科文凭，似乎已不那么光辉夺目了．

你完全不必为此而黯然神伤．这一代青年已经承受且将面临更严峻的挑战，你已经听到了时代的召唤．世界已进人知识经济时代，人们面对愈来愈汹涌的信息洪流，除了不断开拓视野、提高学术层次之外，在未来的历史性竞争中将无立足之余地．为了振兴我国的科学与产业，这一代青年注定要不断攀登、奋斗不息，岂能以区区大学文凭为满足！目前国家急需高级人才，在人才市场上，对硕士、博士的需求有增无减！面对这一充满机遇的形势，你作为一个抱负不凡的青年，不会有一种“志在读研，舍我其谁”的气概油然而生吗？

现在，你已认清了方向，看准了目标，振作了精神；你已全身热

血沸腾，决意奋力一搏了.当你正为寻觅一位向导而徬徨四顾，上下求索之际，你发现了我们这刚刚发出的"考研特别快车".

正好！就请你立即登车启程吧，这里已为你准备了合适的位置，它将载着你顺利完成这次不同凡响的"百日之旅"，送你到达那心向神往的目的地."考研特别快车"的建造者，伴随着我国20年改革开放的历史步伐，不辞辛劳地将自己的智慧、经验、学识与时光，奉献给了这一代勤奋好学的大学生，将一批批青年送入了各名牌大学的研究生院.他们是我国研究生教育迅速发展的见证人，也是年青学子的可靠引导者.

现在，你已坐定于"特别快车"的舒适车厢里了.你该如何有效利用这里所提供的一切，使你在行将到来的决战中运用自如呢？这正是下面要和你细谈的问题.我们的建议十分干脆.

针对问题准备方法，而不是学好方法再找用武之地，这是复习备考与平常课程学习的重大区别.永远以"问题为纲"，应该成为备考者的首要格言！一定要以这一原则去理清思路、整理与掌握内容.例如，"极限计算"无疑是一个需要认真对付的问题，针对这一问题，你在复习时应当了解，这类问题常见的形式有哪些，应分别用什么办法去对付，等等.你得明白，临场之时，你所面对的只能是问题，而应对之策正是现在就要作准备的.

各类问题包罗无遗，无需他求.本书对近十年来的考研试题作了全面的收录汇总、排队归类及精细的统计分析，准确而完整地揭示了试题分布的普遍规律.这一规律实质上是数学界在多年教学实践中所达共识的无言表达，它建立在学科客观性标准的基础上，并不以任何个人的偏好为转移，因而经得起时间与现实的检验.近两年的实际情况几乎无出于此.在这一点上，是绝不致失信于登上"特别快车"的年青读者的.

权衡轻重决定投入.我们当然祝愿你临场时万无一失，大获全胜，但这未必容易.一个稍低一点的目标或许更加现实.因此务必要合理分配你的时间与精力的投人，尽可能使投入与回报相称，适

当集中精力于最重要的问题. 附录Ⅱ所列的“试题分布权数”仅有统计平均的意义，当然不应当作每年实际比重来看，但它的参考意义是不容忽视的. 那些高权数问题，例如“解线性方程组”(4.2)，几乎每年必有；而“高阶导数与 Taylor 公式”(0.2)，则出现的可能性很小. 这些因素，细心的读者不可不知.

武器多般顺手为佳. 为解一道题，在多种方法之间游移不定，抉择难下，乃考场之大忌. 你务必在平时为解每类问题准备方法上的第一选择. 第一选择不必从学术上看是最佳的，只要你认为最顺手就行. 本书中，对每类问题只介绍那些确实有效的解法，且对一些简单快捷的解法作了特别推荐. 凡注明“优先选择”的地方，你不妨细心体会一番. 例如，对计算极限，我们建议优先选择 L'H ôspital 法；对曲线积分计算，建议优先选择用 Green 公式，这都为历年命题实况所印证. 在很多情况下，这种优先选择实际上是唯一选择.

纵横交错实现综合，这是复习应考与平常课程学习的又一重大差别. 你从课程中学到的高等数学，是从微分学到积分学，再到微分方程等，步步为营积累起来的. 你很少有机会接触那些同时涉及多个内容的问题，而这种综合性问题在考研中并不少见，且近年来有逐渐增多的趋势，务必高度重视. 为帮助读者培养解决综合性问题的能力，在本书中我们有意识地适度打破原教材中章节之间的界限. 例如，“极限计算”一节，不仅涉及微分学内容，也涉及积分学内容. 应考时，你当然要懂得微分学与积分学，但孤立的理解未必能成功解决每道试题. 你很可能碰到这样的试题，初看之下，你甚至不能判定它到底是微分学问题，还是积分学问题，实际上是二者兼而有之，如果不能融会贯通，就会束手无策.

读练结合手到为佳，舍此别无良策. 本书固然提供可靠引导，但并无对所有可能碰到的问题的现成答案. 实际上，不可能靠背诵任何一本书而一劳永逸，数学尤其如此. 因此，送给应考者的第二条格言看来应该是：动手，动手，再动手！本书汇集了 1000 道习题，

近10年数学考研试题中几乎所有实质性问题都包含于其中，2001年的试题也不例外！倘你能花点时间做好这些题，绝无不成功之理！况且，本书是这样编排的：每类同型问题之前都有一个典型例题当作样板，这是有意让读者模仿的.有特殊困难的问题作了提示，且每道题都附有答案可资对照.你不妨将本书看作一套专为训练考生而设计的程序，按此程序边看边做下去，就可以顺利掌握全部内容，以至一举成功.

决胜千里以快为贵.决战就在眼前，你拥有的时间已不太多了.而且，你绝不应指望一科独进.如果你能在数学上节省一些时间用于其他课程；或者，至少不因数学而过多挤占复习其他功课的时间，你就增添了一项成功的条件.绝不可在一堆杂乱无章的题解书中漫无边际地游荡，那只有徒然浪费时间.形势如此严峻，已容不得你安步当车，缓缓而行！唯一的选择是走一条捷径，特别快车正是为此而设！本书绝少冗枝蔓叶，处处直入核心问题；基本内容高度概括，令人一目了然；重要公式与结论系统汇集，便于查找取用；重要问题高度强调，条分缕析；非当务之急的内容，一概舍弃——凡此种种，一以贯之，求速而已！本书谓之"速成"，你在细读之后，当确信其绝非虚言.

华中科技大学每年要接受一万余名硕士学位考生报名应试，本校报考全国各重点大学研究生的学生亦有数千人之多.这无疑给华中科技大学数学系的教师们提出了一个额外的任务：为考生们提供数学辅导，帮助他们顺利进入硕士生阶段.这个任务并不轻松，但面对这许多聪慧热忱且勤奋好学的青年，教师们乐于担负起自己的责任.自1980年起每年按期开办的数学考研辅导班，延续至今，受益的学生已不可数计.《考研特别快车》，正是这连续20年不断工作的产物，它的部分作者正是1980年辅导班的最初开创者与其后20年的热心参与者，20年辛勤劳动所凝结的经验，其价值是不言而喻的.

本书由薛明皋、毕志伟、刘先忠、刘次华、万建平等先生执笔，

撰写期间参考了原华中理工大学数学系历年编著的教材及教学参考书，自然应向所有这些书籍的作者及所有为编写本书提供材料的教师表示感谢.

胡适耕

2001.4.10

目　录

1. 微分学 …… (1)

§1.1 极限计算 …… (1)

§1.2 无穷小量 …… (9)

§1.3 导数与微分计算 …… (12)

§1.4 函数在一点的性质 …… (21)

§1.5 中值问题 …… (26)

§1.6 函数动态 …… (31)

§1.7 恒等式、不等式证明及其他 …… (38)

§1.8 几何应用与极值问题 …… (47)

§1.9 补充 …… (54)

2. 积分学 …… (62)

§2.1 不定积分 …… (62)

§2.2 定积分 …… (71)

§2.3 关于定积分的杂题 …… (81)

§2.4 重积分 …… (90)

§2.5 曲线积分 …… (100)

§2.6 曲面积分 …… (109)

§2.7 场论问题 …… (116)

§2.8 积分学的应用 …… (119)

3. 级数与微分方程 …… (130)

§3.1 级数的收敛性 …… (130)

§3.2 Fourier 级数 …… (142)

§3.3 幂级数 …… (147)

§3.4 一阶及可降阶微分方程 …… (158)

§3.5 线性微分方程 …………………………………… (165)
§3.6 微分方程的应用 ………………………………… (172)
4. 线性代数 ………………………………………… (184)
§4.1 行列式 ………………………………………… (184)
§4.2 矩阵运算 ……………………………………… (190)
§4.3 矩阵的秩 ……………………………………… (198)
§4.4 线性方程组 …………………………………… (202)
§4.5 线性相关性 …………………………………… (208)
§4.6 特征值与对角化 ……………………………… (216)
§4.7 对称矩阵与二次型 …………………………… (224)
5. 概率论与数理统计 ………………………………… (233)
§5.1 随机事件与概率 ……………………………… (233)
§5.2 随机变量及其分布 …………………………… (241)
§5.3 随机变量的数字特征 ………………………… (258)
§5.4 数理统计初步 ………………………………… (274)
附录Ⅰ 常用公式 …………………………………… (285)
附录Ⅱ 全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷选录 ……… (304)
附录Ⅲ 试题分布权数 ……………………………… (415)

1 微　分　学

§1.1 极限计算

在数学考研中，“极限计算”有一定重要性．一方面，极限计算可能作为单独试题出现（小型计算题或只写结果的填空题）；另一方面，其他试题的解决往往需要计算某些极限．最有效的极限计算法依赖于微分学，因此将极限计算问题置于本章之首．

1.1.1　函数极限概述

1° 极限运算规则　设 $\lim u$ 与 $\lim v$ 存在且有限，则有

$$\lim(\alpha u+\beta v)=\alpha\lim u+\beta\lim v;$$

$$\lim(uv)=\lim u\lim v;$$

$$\lim(u/v)=\lim u/\lim v(\lim v\neq 0),$$

以上 u,v 均为 x 的函数（下同），α,β 为常数．

2° 变量代换规则　设 $\lim\limits_{t\to\tau}\varphi(t)=a$ 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\tau}f(\varphi(t))=\lim_{x\to a}f(x).$$

3° L'Hôspital 法则　设 $x\to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为无穷小（或皆为无穷大），则

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\tag{1}$$

只要上式右边极限存在．通常只要验明：$f(x),g(x)$ 在 a 邻近可微且 $f(a)=g(a)=0$，即可应用(1)．$x\to a$ 可以换成 $x\to\pm\infty,x\to a^+,x\to a^-$ 等．

4° 等价无穷小替换规则　若 $u\sim v$，即 $\lim u=\lim v=0$，

$\lim(u/v)=1$，则

$$\lim uw=\lim vw;$$

$$\lim(w/u)=\lim(w/v)\quad(w\text{ 为 }x\text{ 的函数}),$$

只要以上等式右端之极限存在.

5° 几个重要极限 应熟记以下标准极限，以便在计算其他更复杂的极限时加以利用：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\quad(\sin x\sim x\sim\tan x);$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\quad(\ln(1+x)\sim x);$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1\quad(\mathrm{e}^x-1\sim x);$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\quad((1+x)^\alpha-1\sim\alpha x);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to-\infty}x^na^x=0\quad(a>1);$$

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0\quad(\alpha>0).$$

6° 极限计算要领

(i) 凡可直接套用已知极限者，宜直接计算之.

(ii) 除情况(i)之外，优先考虑采用 L'H ôspital 法则.

(iii) 在运用 L'H ôspital 法则之前及其过程中，应充分运用各种辅助手段(如变量代换，等价无穷小替换、取对数等)简化极限计算.

在多数情况下，L'H ôspital 法则是一种非常有效的极限计算方法. 它的有力之处在于：式(1)中 $f'(x)/g'(x)$ 往往较 $f(x)/g(x)$ 简单，极限更易计算(当然不是绝对的). 在应用 L'H ôspital 法则时，"式(1)右端极限存在"这一条件是否满足会随着计算过程自动显示，一般无需单独验证. 至于法则所要求的其

他条件，原则上是需要验证的.不过，在容易直接看出的情况下，通常将条件的验证略去.

1.1.2 $\frac{0}{0}$ 型与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

当 $\lim u = \lim v = 0$ 时，称 $\lim(u/v)$ 为 0/0 未定式.对 0/0 型未定式，一般直接用 L'H ôspital 法则；∞/∞ 型未定式仿此.

1 求 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

解 这是 0/0 型未定式，由 L'H ôsptial 法则得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x/\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0}\sqrt{1 - x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin x}{1} = 1. \end{aligned}$$

注意不宜直接对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \cos x}{x/\sqrt{1 - x^2}}$ 用 L'H ôspital 法则.

2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{\sin^3 x}$. $(= 1/6)$

3 求 $\lim\limits_{x\to 1}[1 - \sin(\pi x/2)]^{-1}\ln\cos(x - 1)$. $(= -4/\pi^2)$

4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}[x(1 - \cos\sqrt{x})]^{-1}(1 - \sqrt{\cos x})$. $(= 1/2)$

5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$. $(= 1)$

6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x - \sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{4 + t}}\mathrm{d}t$. $(= 1)$

对于 $0\cdot\infty$ 型未定式，通常利用 $uv = \dfrac{u}{v^{-1}}$ 将其化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

7　求 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\sin x}\ln^2 x$.

解　这是 $0\cdot\infty$ 型未定式，将它化为 ∞/∞ 型：

$$l\xlongequal{\sin x\sim x}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln^2 x$$

$$\xlongequal{y=1/\sqrt{x}}\lim_{y\to+\infty}\frac{4\ln^2 y}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{8\ln y}{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{8/y}{1}=0.$$

8　求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$. $\left(=\dfrac{2}{\pi}\right)$

9　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$. $(=0)$

10　求 $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$. $(=0)$

11　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{1/x}-1)x$. $(=1)$

12　设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$. $(=36)$

若极限 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ 是一个 $\infty-\infty$ 型，则通常应将 $f(x)-g(x)$ 化为一个分式，转化为 $0/0$ 型或 ∞/∞ 型.

13　求 $l=\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$.

解　这是一个 $\infty-\infty$ 型，它可转化为 $0/0$ 型：

$$l=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=-1.$$

14　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. $\left(=\dfrac{1}{2}\right)$

15　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. $\left(=\dfrac{1}{2}\right)$

16　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$. $\left(=\dfrac{1}{3}\right)$

1.1.3 1^{∞} 型未定式

对于未定型 1^{∞}（以及 ∞^{0}），通常利用公式

$$\boxed{\lim u^{v} = \mathrm{e}^{\lim v \ln u}} \tag{2}$$

化成 $0 \cdot \infty$型计算，或者利用标准结果

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

17 求 $l = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$.

解 这是一个 1^{∞} 型. 因

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} &= \lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos x - \ln\operatorname{ch} x}{x^2}\\ &= \lim_{x \to 0}\frac{-\tan x - \operatorname{th} x}{2x}\\ &= -\lim_{x \to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) = -1,\end{aligned}$$

故由公式(2)有 $l = \mathrm{e}^{-1}$.

18 求 $\lim\limits_{x \to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\pi/x}$. $(=\mathrm{e}^{-\pi/2})$

19 求 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sin\dfrac{2}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. $(=\mathrm{e}^{2})$

20 求 $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{1}{n}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx})\right]^{1/x}$. $(=\mathrm{e}^{(n+1)/2})$

21 求 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{(x-1)/2}$. $(=\mathrm{e}^{-3/2})$

22 求 $\lim\limits_{x \to 0}(1+3x)^{2/\sin x}$. $(=\mathrm{e}^{6})$

23 求 $\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{1+x^2} + x)^{1/x}$. $(=\mathrm{e})$

24 求 $\lim\limits_{x \to \infty}(x + \sqrt{x^2+1})^{1/x}$. $(=1)$

25 求 $\lim\limits_{x \to \infty}[\sin(2/x^2) + \cos(1/x)]^{1/\sin^2(1/x)}$. $(=\mathrm{e}^{3/2})$

1.1.4 数列极限

鉴于计算函数极限有“L'H ôspital 法则”这样强有力的方法可用，计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$时，应优先考虑将其转化为函数极限，方法是：选取函数 $f(x)$ 与数列$\{x_n\}$，使 $a_n=f(x_n)$ 且 $x_n\to a(n\to\infty)$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to a}f(x) \tag{3}$$

只要式(3)右端之极限存在.

26 求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}n[\sqrt[n]{e}-n(\sqrt[n]{e}-1)]$.

解 $n\to\infty$ 相当于 $x_n=1/n\to 0$，于是

$$\begin{aligned}l&=\lim_{x\to 0}x^{-1}\left[e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x-e^x}{2x}\quad(\text{L'H ôspital 法则})\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}e^x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

以上计算实际上已用到$n[\sqrt[n]{e}-n(\sqrt[n]{e}-1)]=f(n^{-1})$，$f(x)=x^{-1}[e^x-x^{-1}(e^x-1)]$. 但这一点只是寓于计算中，而不必明确写出.

27 求 $\lim\limits_{n\to\infty}6n^2[\sqrt[n]{e}+1-2n(\sqrt[n]{e}-1)]$. $(=1)$

28 设 $a,b>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})/2]^n$. $(=\sqrt{ab})$

29 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$. $(=e^4)$

30 求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt[n]{64}+2)/3]^{2n-1}$.

解 首先取对数，然后以 x^{-1} 代 n：

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}(2n-1)[\ln(\sqrt[n]{64}+2)-\ln 3]$$