

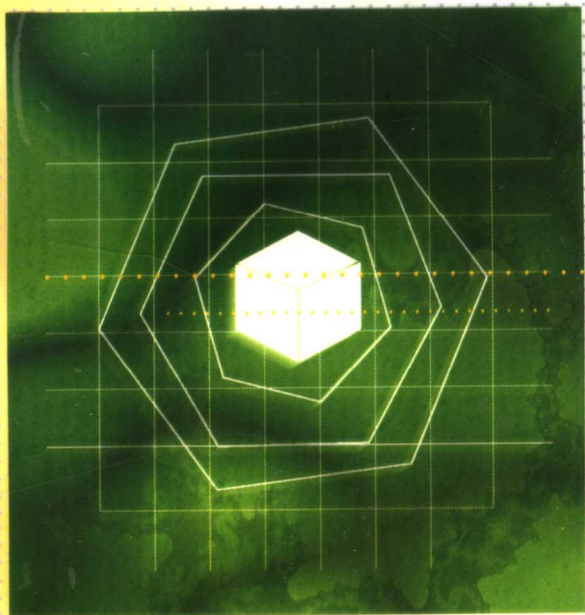
中 学 数 学 视 野 丛 书

ZHONGXUESHUXUESHIBIYECONGSHU

证明的艺术

ZHENGMING DE YISHU

贺贤孝 编著



湖 南 教 育 出 版 社

中 学 生 数 学 视 野 丛 书

ZHONGXUESHENG SHUXUE SHIYU CONGSHU

证明的艺术

ZHENGMING DE YISHU

贺贤孝 编著

湖 南 教 育 出 版 社

中学生数学视野丛书

证明的艺术

贺贤孝 著

责任编辑:胡 坚 郑绍辉

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路643号)

湖南省新华书店经销 长沙市银都教育印刷厂印刷

787×1092 32开 印张:6.25 字数:148000

2000年6月第1版 2000年6月第1次印刷

印数:1—1000

ISBN7-5355-3196-2/G·3191

定价:8.60元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

(厂址:长沙市远大一路马王堆 邮编:410001)

(

《中学生数学视野》丛书编委会

主 编：刘绍学

副主编：冯克勤

编 委：周昌强 李培信 潘一民

贺贤孝 赵雄辉 胡 坚

郑绍辉

序

我们有一个数学世界,它为现实世界(科学)提供大量有力的工具,它还精神世界(哲学)贡献丰富深刻的思想。

人们创造数去记载物件的个数、长度、速度等,运用多项式去表述物理定律,用矩阵去作多种商品的价目表,去刻画几何中的变换。人们创造微积分,使得在研究几何图形和物理现象时有了强有力的工具。例如,根据物理定律数学工作者通过计算能判定某一从未发现的星体必将在某天某时在某方向上出现,而后天文观测者确在该天该时该方向观测到它。数学世界在爱因斯坦的相对论出现之前已准备好一种几何空间,刚好满足它的需要,我们日常生活中离不开的计算机也是先在数学世界中酝酿,而后由数学工作者设计出来的。只要想一想:装进一个特殊软件,计算机就能帮你证明平面几何定理,就能和国际象棋冠军对阵,就能在平稳对接宇宙飞船中起重要作用,只要想一想数学和计算机科学的手足关系,谁都会赞赏数学世界提供解决问题能力的神奇和伟大。今日数学世界仍在继续为我们创造和贡献新工具、新方法、新理论。

数学世界中的确还有另外一面。按照数学自身发展的规律提出和研究的一些问题,它们是数学世界中特有的现象,例如大家都听说过的哥德巴赫问题,当你接触、研究它们时,你会感到一种棋艺味、艺术味、哲学味,

它们本身看来不像是研究现实世界可以用得上的工具,然而它们却和数学世界中的工具性质部分相互呼应、相互影响、紧密联系而共同组成一个绚丽多彩的统一世界。

中学数学是数学世界的基石,是进入数学世界的必经之路,是数学教育工作者精心为全体中学生设计的多层台阶。然而他(她)们中的一些数学爱好者一定会希望向周围看一看,或者爬到一个山头,或者钻入小林的深处,领略一下数学世界中的风采,体验一下数学世界的气氛,从而获得一些数学兴致和数学修养。我们这套丛书就是为这些中学生编写的。如果说英语给我们打开一个通向境外世界的窗口,那么中学数学给我们打开了通向数学世界的大门,而这套丛书将引导我们去欣赏它的一些景点,扩大我们的数学视野。

我们常谈论数学的力量(这是大家都同意的),的确,搞经济理论的人,常是数学出身的人得到大奖,搞计算机科学的人,也常是数学出身的人有出色表现。人们还谈论数学的美(或许有人不同意),的确,在形式符号掩盖下,数学中完美的结构、深刻的和谐、意外的联系都给人一种美的享受,美是有力量的。无疑,在青少年时期给自己建立一个好的数学基础和数学修养,那将是一笔终身享受、终身受益的资本。

但愿这套丛书在这方面能对有数学兴趣的中学生们有所帮助。

刘绍学

1997年11月写于北京师范大学

前 言

认识与研究数学的主要工作就是做出新的数学发现.人们根据实验、观察、归纳与分析发现新的数学事实,然后,设法证实它或推翻它,要做到这些都离不开数学证明.因此,没有理由不把数学证明看做是具有认识价值的科学活动.但是,一个好的证明具有简单性、和谐性、首创性等审美特征.要寻求这样的证明,与艺术创造一样,需要丰富的想像力;阅读和理解这样的证明,与艺术欣赏一样,需要深邃的鉴赏力.因此,也没有理由不把数学证明看做是精湛的艺术活动.本书的目的就是希望将读者带进数学证明的百花园里,使你在认识数学真理的历程中,又感受到数学证明的艺术魅力;也只有在艺术氛围中,才能吸引读者深入认识数学真理.

全书共分五章,从各自不同的视点讲述证明的艺术.精选了大约 60 个著名的数学问题的优美证明.这些证明大多出自数学家,有的出自数学教师,而有的则出自中学生或数学业余爱好者.内容的选择与编写遵循两条原则,其一是要有一定的趣味性与可读性,不要过分严肃,尽量贴近中学生,但要对认真阅读过的所有读者都有益处.其二是这些题目的证明与解答具有一定的创造性,并且能够成为解决其他问题的模式,在教学方法上有较深刻的意义与价值.

此外,本书在讲述艺术主题时,不失时机地介绍了一些优美证明的发

现过程及这一过程能给予人们的启示.还介绍了数学命题推广的方法,甚至还提到了一些未解决的数学之谜,因而,成为我的另一本书《数学中的未解之谜》的续篇.

全书各章节之间基本上彼此独立,你可以先挑选容易懂的或感兴趣的章节,回过头来再阅读复杂的内容,并且建议读者多读几遍.当代美国数学家哈尔莫斯说过:“学习数学的最好办法是做数学.”我个人的体会是如果把我们的活动仅限于阅读证明,那么其结果充其量只能理解一些定理.如果我们进一步尝试并做出好的证明,我们就会逐渐懂得什么是数学.正是在这一思想的指导下,几十年的教学生涯使我养成了一个习惯,我总是想办法使学生们积极参与我的教学活动.同样地,我写这本书时,也不时地为读者留有参与的机会.在我讲出问题解答之前,你最好能暂时放下书好好想一想.希望你能边读边思考边动手推演,这样做了,你的体会才能逐渐深刻起来,也许你会因此步入数学这座科学的神圣殿堂!

最后,让我援引宋朝名将岳飞的一句名言:“运用之妙,存乎一心.”借此书出版之机,愿与读者们同切磋,共琢磨!

贺贤孝

1999年4月20日于大连辽宁师范大学

目 录

第一章 证明及其方式	(1)
1.1 导言	(1)
1.2 证明的直觉构思	(2)
1.3 证明的物理构思.....	(12)
1.4 特例证明.....	(24)
1.5 形式演绎证明.....	(37)
第二章 证明与认知	(41)
2.1 证明与理性.....	(41)
2.2 证明与概念.....	(56)
2.3 证明与发现.....	(61)
2.4 证明与反例.....	(79)
第三章 证明探奇	(90)
3.1 一道几乎无法解决的怪题 ——信息的收集与分析.....	(90)
3.2 勾股定理证明奇观 ——巧用形的割、拼与布列	(96)
3.3 欧拉不等式 ——信息的加工与组合	(109)
3.4 法尼亚诺问题与佩多不等式 ——巧用几何变换	(116)

3.5	欧几里得的一个经典证明	
	——存在与构造方法	(121)
3.6	施坦豪斯问题	
	——再谈构造方法	(127)
3.7	从推翻亚里士多德定律说开去	
	——反证法与最值原理	(131)
3.8	施泰纳-莱默斯定理的证明奇趣	
	——反证与反例	(135)
3.9	算术平均与几何平均不等式的经典证明	
	——逐步调整法	(142)
3.10	优美的日本定理	
	——化归法	(146)
3.11	从世界末日问题到多边形剖分问题	
	——递归法	(151)
第四章	证明的误区	(158)
4.1	19 世纪的几何悖论	
	——图形的误导	(158)
4.2	三角形内角和定理的证明	
	——潜入的假设与条件	(164)
4.3	勒让德证明第五公设	
	——虚假论据	(166)
4.4	从肯普的漏证谈起	
	——以偏概全的错误	(171)
4.5	对证明误区的评注	(174)
第五章	计算机在数学证明中的应用	(178)
5.1	计算机在数学证明中的用途	(178)
5.2	几何定理的机器证明	(185)

第一章

证明及其方式

教学中出现了各种各样的时兴方式…

——R.L. 怀尔德

1.1 导 言

数学上讲的证明,确切地说应是论证.所谓论证一般是指“引用论据来证明论题的真实性的论述过程,是由论据推出论题时所使用的推理形式”.这里的论题是指“真实性需要证明的命题”,而论据是指“用来证明论题的判断”.^①因此,数学证明就是用已知的数学事实或其真实性显而易见的数学事实来证明数学命题的真实性,使人们认可这一数学命题.它是由作为论据的事实推出欲证命题所使用的推理形式.

一般地说,数学证明是由若干段推理组成的.而每一段推理都有一个确定的论据为基础,由已知事实推出一个结论.所推出

^① 中国社会科学院语言研究所词典编辑室编《现代汉语词典》,商务印书馆,1987年.

的结论正确与否、真实与否,取决于论据的正确性、真实性.而论据的正确性与真实性可能来自于现实:直观图示与物理世界,也可能来自于数学理论或公理系统.于是,形成了数学证明的直观方式、物理方式和形式演绎方式.能否给出一个正确证明,能否理解一个证明,不但有逻辑因素,更有心理认知因素.几千年的数学史表明,直观的、物理的方式早于形式演绎方式.正如美国数学史家克莱因所说的:“很久以前数学家就知道直觉的可靠性要胜过逻辑的可靠性.”但演绎证明又是数学力量的表现,是数学区别于其他科学的主要特征.这些不同的证明方式各有利弊,互为补充,适合于不同经验与知识水平、不同年龄阶段的人的需要.正像艺术需要表现它的形式一样,数学证明作为一门艺术,也有它特有的表现方式.数学证明的艺术性首先就在于它的外在方式的选择与构思上.证明思路的奇特,不同事物看似无关而突然发现某种联系常能使我们找到证明的方法,而赋予证明的美.一个复杂艰难的证明,从另外一个角度,可得到一个非常简单的、漂亮的证明.

1.2 证明的直觉构思

要确认一个数学命题就要去观察有关的数学现象,这里说的“观察”不仅是用肉眼去看,更要用直觉去体察.数学命题的直观证明就是使用直觉来确认论据的正确性与真实性,易于与人的经验相结合,所需的数学基础知识较少,因而,易于为人所接受.有数学家指出,直到 1850 年左右,数学家们一直大量地使用直观方式来论证数学定理.即使在今天,直观方式的证明对于数

学基础知识较少或年龄较小的人来说,仍旧是理解数学的重要手段。大数学家哈代^①说:“严格来说,没有所谓证明这个东西,我们只能指指点点,只是讲课中在黑板上画的图画,用以激发学生的想像力。”

法国著名数学家迪厄多内^②曾举例说明直观证明对于人特别是中学生理解数学的重要性,他说:“为了证明,过直线 AB 上一点 P 可以作且只可以作一条直线 PC 垂直于 AB . 只需从点 P 作射线 PC , 让 PC 从 PB 的位置开始绕点 P 旋转直到 PA . 在这个过程中, $\angle BPC$ 从 0° 逐渐变大到 180° , 而 $\angle CPA$ 由 180° 逐渐减少到 0° , 因此,必然在一处且只在一处使 $\angle BPC = \angle CPA$, 且都为 90° . 这显然是一个很好的直觉构思。”迪厄多内接着说:“而教师却用一种远比上述构思严格的逻辑来证明. 我求学时期的个人回忆是,我永远弄不清这些差异,在很长的一段日子里,证明的概念使我觉得十分神秘。”

图 1-1 是欧几里得^③在《几何原本》第 2 卷证明命题所使用的图. 我们只需对该图中边长为 $a+b$ 的正方形看一眼,就能立即领会到为什么 $(a+b)^2$ 等于 $a^2 + 2ab + b^2$. 对此,法国大思想家卢梭^④在他的《忏悔录》第 6 部中这样描述过:“当我第一次通过计算发

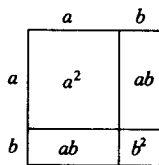


图 1-1

现:一个二项式的平方等于它的各项的平方和加上这两项之积的 2 倍,根本不相信这一结果,直到我找到了一个能验证它的几

① 哈代(G. H. Hardy, 1877—1947), 英国数学家。

② 迪厄多内(J. A. Dieudonne, 1906—), 法国数学家。

③ 欧几里得(Euclid, 约公元前 330—前 275), 希腊大数学家、教育家。著有 13 卷的《几何原本》。

④ 卢梭(J. J. Rousseau, 1712—1778), 法国哲学家、思想家, 1762 年出版《民约论》主张人权平等。《忏悔录》是他死后出版的记述他的经历的书。

何图形,情况才发生了根本变化.我最喜欢把代数看做一种纯抽象的量,但当我们果真扩大它的应用范围时,我又喜欢看到这种扩展在线条上进行,否则我就什么也不能理解。”

一、铅笔与三角形内角和定理

现代著名数学家陈省身^①把三角形内角和定理称为欧几里得几何的主要成果之一。

如图 1-2 所示,在平面内任意给出一个三角形(ABC),用一支铅笔沿着 AC 放下,使末端落在点 A 处,尖端朝向点 C (图中用有向线段 AP 表示铅笔,用箭头表示铅笔尖端).在三角形外画一个同方向同大小的有向线段 OP' .然后,让铅笔 AP 绕点 A 逆时针旋转到 AB 边上的 AQ ,有向线段 OP' 也同步运动得到有向线段 OQ' ,显然, $\angle P'OQ' = \angle PAQ = \angle A$.将 AQ 沿边

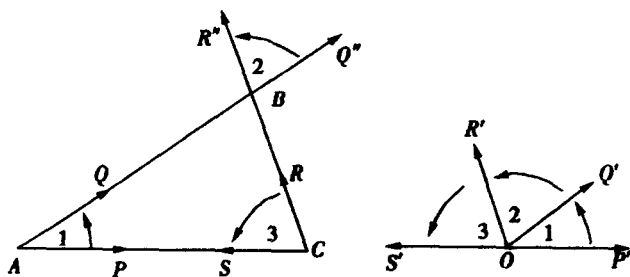


图 1-2

AB 平移到 BQ'' 处. 再使铅笔 BQ'' 绕点 B 逆时针旋转到 CB 的延长线上的 BR'' 处, 有向线段 OQ' 也同步旋转到 OR' , 则 $\angle Q'OR' = \angle Q''BR'' = \angle B$. 将铅笔 BR'' 沿边 BC 平移到 CR 处, 再使

① 陈省身(1911—),美籍华人数学家.生于浙江省嘉兴县,在1961年被选为美国科学院院士,多次获得美国及国际数学大奖.

铅笔 CR 绕点 C 逆时针旋转到 CA 边的 CS 处, 有向线段 OR' 同步旋转到 OS' , 则 $\angle R'OS' = \angle RCS = \angle C$. 铅笔经三次旋转的角度之和恰为 $\triangle ABC$ 的三内角之和, 即 $\angle P'OS'$. 但铅笔 AP 与铅笔 CS 共线且反方向, 形成有向线段 OP' 与 OS' 共线且反方向, 因而, $\angle P'OS' = 180^\circ$.

这是一种简单明了的直观演示, 一支铅笔证明了三角形内角和定理!

二、铁丝与多边形内角和定理

德国物理学家马赫巧妙地使用一根铁丝证明了多边形内角和定理, 一时传为佳话.

设想一根足够长的铁丝, 顺着任意凸 n 边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的边 A_nA_1 放置. 将铁丝露出多边形的部分 A_1L , 绕点 A_1 顺时针旋转角度 α_1 , 与边 A_1A_2 重合, 如图 1-3 所示; 再将铁丝 A_2L 绕点 A_2 顺时针旋转角度 α_2 , 与边 A_2A_3 重合; 如此继续下去, 直到铁丝露出部分 A_nL 绕点 A_n 顺时针旋转角度 α_n , 与边 A_nA_1 重合.

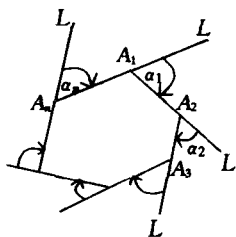


图 1-3

显然, 铁丝在上述旋转过程恰好顺时针转过一周, 即

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ.$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 恰是多边形的各外角度数, 由此, 马赫直观地证明了多边形外角和定理: 凸多边形的外角之和为 360° .

但多边形的每个外角与相邻的内角互补, 故有

$$(180^\circ - A_1) + (180^\circ - A_2) + \cdots + (180^\circ - A_n) = 360^\circ,$$

整理得

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

马赫的直观证明不但机智,而且还揭示了更深邃的思想内涵:多边形内角和定理(或外角和定理)是多边形封闭性的一种数量反映.将这种思想扩展开来,就可以解决“折多边形”问题.

如图 1-4 所示为折九边形 $A_1A_2\cdots A_9$,你能模仿马赫的做法证明 $A_1 + A_2 + \cdots + A_9 = 540^\circ$ 吗?

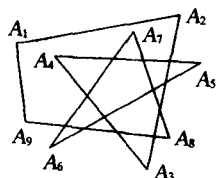


图 1-4

一般地,如果铁丝在折 n 边形上共旋转了 m 周,则

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (n-2m) \cdot 180^\circ.$$

三、雨伞与多面角性质

早些年,高中立体几何课本中有一个定理:凸多面角所有面角之和小于 360° .

如图 1-5 所示,由点 O 引出几条射线,其中每三条射线不在同一平面内,则由这些射线以及相邻射线之间的平面部分所组成的图形称为多面角.如果多面角的各个面都在任一面的一侧,称其为凸多面角.各射线称为多面角的棱,相邻棱

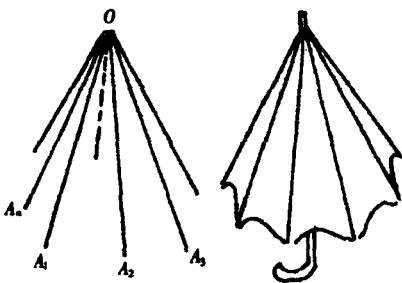


图 1-5

的夹角称为多面角的面角.将多面角设想为一把雨伞,随着伞张开,各个面角在增大,所有面角之和也随着增大,直到雨伞撑至平面,面角和达到最大值 360° ,因此,多面角的所有面角之和必

小于 360° .

在我的记忆中,这种直观演示留给学生的印象远远比课本中严格的形式演绎证明深刻得多.许多年后,演绎证明早已忘得一干二净,但直观证明却记忆犹新.我的体验是研究数学、学习数学,心理观点往往比逻辑观点更重要.逻辑并不是数学的一切.直觉使人们“触摸”到自己的研究对象,使之能在还不知道其严格演绎证明之前,就已看出命题的正确性.动态的直观较之静态的直观又增加了运动、变化以及连续过程,更容易体察量与量的关系.

美国教育家、数学家艾伦多弗^①曾倡导:“学习任何数学主题的第一步是发展直觉.”

四、一个古老命题证明的新构思

在图 1-6 中, M 是正方形 $ABCD$ 内的一点, 且 $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$.

求证: $\triangle MCD$ 是正三角形.

通常的证法是使用同一法^②. 这里介绍一个直观证明.

在正方形内, 作一点 N 使 $\angle NBC = \angle NCB = 15^\circ$. 联结 MN , 一眼就看出 $\triangle AMB \cong \triangle BNC$, 则 $\angle MBN = 60^\circ$, $\triangle BMN$ 是正三角形, 进而, 可看出 $\triangle MNC$

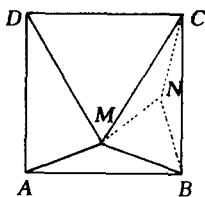


图 1-6

① 艾伦多弗 (C. B. Allendoerfer, 1911—1974), 华盛顿大学教授, 曾任美国数学协会主席, 著作有《数学原理》.

② 为证明图形 A 具有性质 N , 先作具有性质 N 的图形 B , 再证 A 与 B 重合, 此法称为同一法. 在此题中以 CD 为一边向正方形内作正三角形 $M'CD$, 再证 M 与 M' 重合.