经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　张饴慈　檀晋轩
编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）
　　　　　王尚志　张饴慈　檀晋轩

北京师范大学出版社
·北 京·

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功．

严士健 王尚志

2004年6月于北京

目　录

引言

矩阵是一种工具，可以用它来研究一些基本的图像（向量）变换．在这个专题里，我们将逐渐地了解并熟悉这一工具．为了对矩阵有一个初步的了解，我们先来看下面的例子．

例 1 某公司负责从两个矿区向三个城市送煤：

从甲矿区向城市 A,B,C 送煤的量分别是 200 万吨、240 万吨、160 万吨；

从乙矿区向城市 A,B,C 送煤的量分别是 400 万吨、360 万吨、820 万吨．

我们通过下面一个数表来表示以上的数据关系（单位：万吨）：

$$\begin{array}{c} \\ \text{甲矿区} \\ \text{乙矿区} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{城市}A & \text{城市}B & \text{城市}C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 240 & 160 \\ 400 & 360 & 820 \end{bmatrix} \end{array}$$

通常把这里的二行三列的数阵称为**二行三列矩阵**．

在经济学研究投入、产出、规划等问题时，这样的矩阵是十分有用的．

例 2 小王是个气象爱好者，他根据多年收集的资料，发现了当地天气有如下的规律：

晴天的次日是晴天的概率为$\frac{3}{4}$；

晴天的次日是阴天的概率为$\frac{1}{8}$；

晴天的次日是雨天的概率为$\frac{1}{8}$．

同样的，阴天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$；

雨天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$．

我们可以用一张表，把上述数据清晰地表达出来：

$$\begin{array}{cc} & \text{次日} \\ & \begin{array}{ccc}\text{晴} & \text{阴} & \text{雨}\end{array} \\ \text{今日}\ \begin{array}{c}\text{晴}\\[2ex]\text{阴}\\[2ex]\text{雨}\end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\[1ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\[1ex] \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

从这个表中，可以一目了然地看出明天天气和今天天气的关系，这个三行三列的数阵称为三行三列矩阵，又叫**三阶方阵**. 这个矩阵反映了状态的转移，也叫作状态转移矩阵. 在研究随机现象中，这样的矩阵十分有用.

简单地说，一个矩阵是一个矩形的数表，由 $m\times n$ 个数据组成，排成 m 行 n 列，称为 **m 行 n 列矩阵**，通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 等表示. 特别地，n 行 n 列矩阵又叫作 **n 阶方阵**. 例如：

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0.7 \\ 2 & \sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是二行四列矩阵；

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是三行二列矩阵；

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是二行二列矩阵，即二阶方阵.

例 3 给定线性方程组

$$\begin{cases} x-2y+3z=4, \\ 2x+y-z=-2, \\ -x+4y+2z=7. \end{cases}$$

决定方程组的关键是方程中未知数的系数和常数项，而未知数既可以用 x,y,z 表示，也可以用其他字母表示. 例如，方程组

$$\begin{cases} u-2v+3w=4, \\ 2u+v-w=-2, \\ -u+4v+2w=7, \end{cases}$$

和上面的方程组相比，只有未知数的字母不同，但它们所表示的方程组完全相同.

上面的方程组可表示为

$$\begin{cases} 1x+(-2)y+\quad 3z=4, \\ 2x+\quad 1y+(-1)z=-2, \\ (-1)x+\quad 4y+\quad 2z=7. \end{cases}$$

抽出方程组中的未知数的系数和常数项，我们就得到下面的一个三行四列矩阵

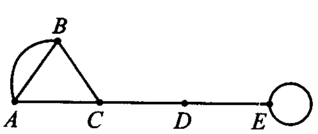
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

称它为该方程组的增广矩阵. 如果不考虑常数项，我们就得到下面的一个三阶方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

称它为该方程组的系数矩阵. 在研究线性方程组理论中，这两个矩阵发挥着重要的作用.

例 4 考察下图，这是由五个点 A,B,C,D,E 和连接它们的一些线组成的一个图.



连线反映了点与点之间的关系，如点 A 和点 B 之间有 2 条线连接，点 C 和点 D 之间有一条线连接，点 E 有一条自己到自己的线，而点 B 和点 D 之间没有线连接，等等. 为了清晰，我们可用自然数 n 反映两点之间线的条数，若两点无线连接，记为 0，有一条线连接，记为 1，等等. 这样我们可以用以下矩阵清晰反映图中的各种关系：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

这是一个五行五列的矩阵，称为上图的相邻矩阵，它在图论的研究中很有用. 事实上，给定一个图的相邻矩阵，就可以画出相关的图.

说 明

图论是数学的一个重要研究分支，矩阵是研究图论的重要工具之一.

矩阵的应用非常广泛.介绍矩阵的知识,大多是从代数的角度,作为一种新的运算对象加以讨论.本专题的目的不是系统地介绍矩阵的知识,我们希望更多地说明矩阵的几何背景,把矩阵作为表示几何变换的工具,通过几何背景,理解矩阵的性质和作用.我们的讨论仅限于二阶的情况.对这部分内容有兴趣的同学,可以参阅大学使用的《线性代数》或《高等代数》教科书.

习 题

1. 生产零件时,需要先将材料做成零件的毛坯,然后再精加工.现生产三种零件,一块原料有四种下样方式:

   第一种下样方式能得到零件 A, B, C 的毛坯数分别为1个、3个、4个;

   第二种下样方式能得到零件 A, B, C 的毛坯数分别为4个、1个、1个;

   第三种下样方式能得到零件 A, B, C 的毛坯数分别为0个、6个、2个;

   第四种下样方式能得到零件 A, B, C 的毛坯数分别为5个、0个、0个.

   试把上述不同下样方式能得到的毛坯数用一个矩阵表示.

2. 营养配餐中心为学生准备了各种菜肴,每份中能量、脂肪、蛋白质的含量各不相同.已知:

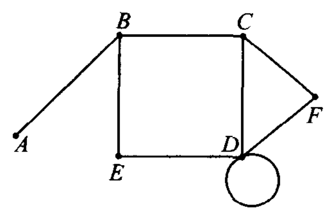
   "肉末粉条"中所含的上述三种营养成分分别为649千卡❶、30 g,10 g;

   "炸酱排"中所含的上述三种营养成分分别为258千卡、20 g,19 g;

   "韭菜豆芽"中所含的上述三种营养成分分别为131千卡、15 g,3 g.

   试把上述结果用矩阵表示.

3. 写出下图的相邻矩阵.



(第3题)

❶ 1千卡=4 187焦耳.

4. 现已知一个图中含有 A,B,C,D 四个点，请根据如下相邻矩阵画出该图：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 写出表示下列方程组的增广矩阵及系数矩阵.

(1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x-y+z=0, \\ -x+3y-z=7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 5x+2y=3. \end{cases}$

6. 下列矩阵为某些线性方程组的增广矩阵，请写出下列矩阵所表示的方程组.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. 五个人 A,B,C,D,E，现知道 A 和 B,C 都相识，但 C 只和 A,D,E 相识，B 还和 D 相识. 试用一个只含数 0 和 1 的矩阵表示他们之间的相识关系. 其中，用 0 表示两个人之间不相识，用 1 表示两个人之间相识.

8. 从现实生活中找出一个用矩阵表示的问题.

第一章 平面向量与二阶方阵

§1 平面向量及向量的运算

1.1 向量的引入

在现实世界中，我们遇到的量大致有两类.

一类只有大小，没有方向，如长度、面积、质量等，称为**数量**.

另一类既有大小，又有方向，如位移、速度、力等. 例如，民航每天都有从北京飞往上海、广州、西安等地的航班，每次飞行都是民航客机的一次位移，由于飞行的距离和方向各不相同，因此它们是不同的位移(如图 1-1).

问题与思考

在你所学过的量中，哪些是数量？哪些是向量？

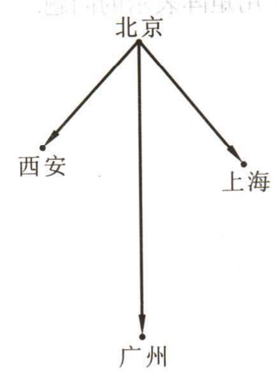


图 1-1 北京部分航班线路示意图

我们把既有大小，又有方向的量称为**向量**.

1.2 向量的几何表示——有向线段

数学中，怎样表示向量呢？

我们知道，在物理学中，表示位移最简单的方法，是用一条带箭头的线段，箭头方向表示位移的方向，线段长度表示位移的大小.

一般地，给定线段 AB，若我们把端点 A 作为起点，端点 B 作为终点，则线段 AB 就具有了从起点 A 到终点 B 的方向，这样的线段既有大小，又有方向，称之为**有向线段**(如图 1-2)，记作$\overrightarrow{AB}$.

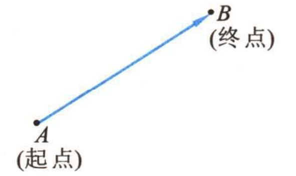


图 1-2

有向线段是向量的几何表示，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小. 书中我们常用黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \cdots$ 或黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 表示向量；手写时常用 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示. 当用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，记作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$.

应该注意，数学中的向量与物理中的矢量是有区别的. 在数学中，只考虑向量的大小和方向，而与起点位置无关. 通常又称为**自由向量**.

如果两个向量通过平移能够重合，我们称这两个向量是**相等向量**. 如果表示两个向量的有向线段所在直线平行或重合，则称这两个向量**共线**，也称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线(即平行)，记作 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

如图 1-3，容易看出

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3},\quad \boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\gamma}.$$

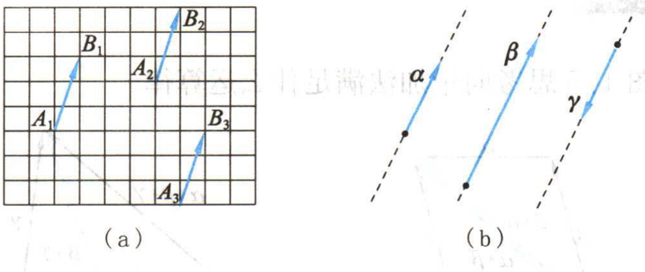


图 1-3

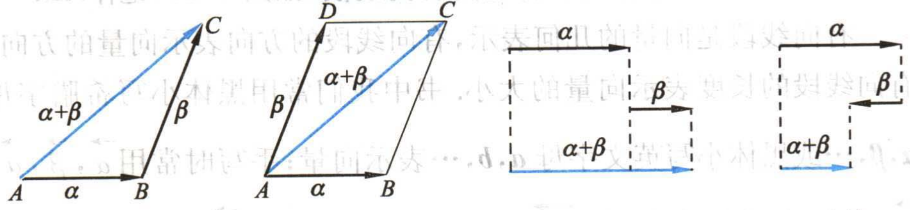
特别地，长度为零的向量，叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 规定**零向量与任意向量共线**.

1.3 向量的和

如果飞机从北京飞往上海，再从上海飞往广州，那么，飞机从北

京直接飞往广州的位移,与前面连续两次位移的结果相同. 称后面一次位移为前面两次位移的合位移.

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,在平面内任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**,记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,如图 1-4(a),即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.



(a)　(b)　(c)　(d)

图 1-4

我们还可以通过另一种方法确定两个向量的和. 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$,若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 不是共线向量,则由 AB,AD 为一组邻边可以构造一个平行四边形 $ABCD$,向量 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和,记作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,如图 1-4(b).

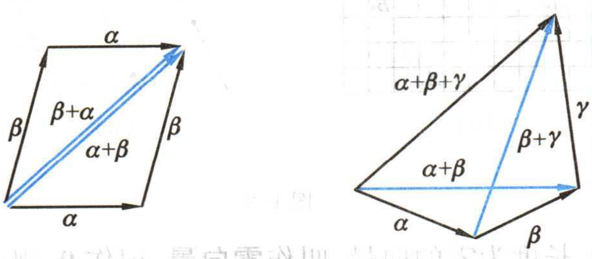
以上两种求两个向量和的方法,分别叫作向量求和的"三角形法则"和"平行四边形法则". 图 1-4(c)和(d)表示了两个共线向量求和的情形.

思考交流

结合图 1-5 思考向量加法满足什么运算律.

说　明

两个向量求和的三角形法则可以推广至有限个向量求和.



(a)　(b)

图 1-5

向量的加法满足交换律与结合律,即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha};$$

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}).$$

这与我们熟悉的数的加法法则一致.

1.4　数乘向量

对于给定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们用 $2\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，而长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度 2 倍的向量；用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度一半的向量；用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，长度相同的向量，如图 1-6.

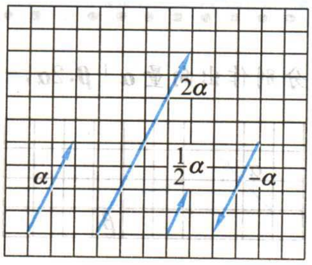


图 1-6

由此，我们可以得到数乘的定义：

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$（我们简称为**数乘**）仍表示一个向量，它的长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度的 $|\lambda|$ 倍；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

说　明

关于数乘运算满足以下规则（λ，μ 为实数）：

$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$；

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

根据此定义，我们可以得到如下结果：

若向量 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行，即 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 反之，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即满足 $\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\alpha}$，则存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

1.5　两个向量的差

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，我们定义 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $(-\boldsymbol{\beta})$ 的和，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

根据向量和的定义，结合图 1-7 不难看出：向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}.$$

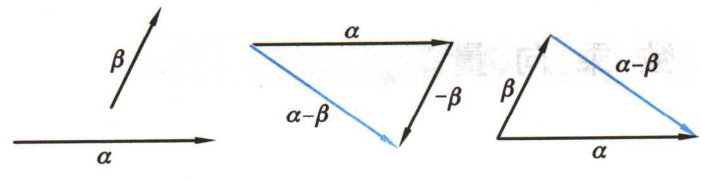
我们称 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 减去 $\boldsymbol{\beta}$ 的差.

特别地，

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}.$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

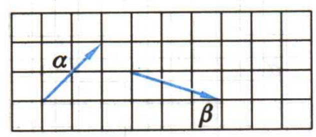


(a)　　　　(b)

图 1-7

练　习

给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,如图,分别作出向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,$2\boldsymbol{\alpha}$,$-\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

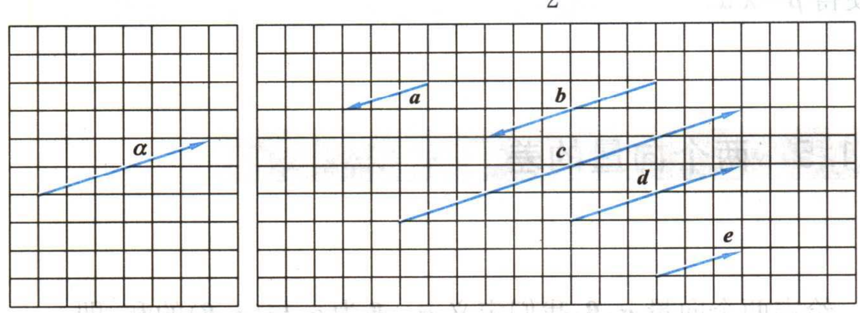


习　题　1—1

A　组

1. 仔细观察下列图形,右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作如下运算得到的向量:

(1) $-\boldsymbol{\alpha}$;　　(2) $2\boldsymbol{\alpha}$;　　(3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$.



(第 1 题)

2. 仔细观察下列图形,右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 作如下运算得到的向量:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;　　(2) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.