高等学校教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

伍宪彬　相丽驰　徐园芬　主编
许志强　鲁立刚　主审

◇

注重基本概念、基本理论和基本技能训练

◇

避开复杂计算和技巧，删减一些不实用的内容

◇

紧靠经管专业需要，增加经济数学模型和经济应用实例

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高 等 学 校 教 材

高 等 数 学

伍宪彬　相丽驰　徐园芬　主　编
袁林忠　吴惠玲　郭金骥　副主编
许志强　鲁立刚　　　　　主　审

中 国 铁 道 出 版 社

2 0 0 4 年·北京

内 容 简 介

本书注重基本概念、基本理论和基本技能的训练，并针对经济、管理类专业的需要，注重培养学生应用数学知识分析和解决问题的能力。第一至五章以一元微积分为主，和第十章微分方程构成体系；第六至八章介绍多元函数的微积分；第九章介绍无穷级数。

本书保持了高等数学的系统性和科学性，同时也省略了非数学专业学生不必掌握的复杂计算和证明技巧；为适合经济类专业需要，增加了经济数学模型及经济应用实例。适合作为高校非数学专业的高等数学教材，尤其适合作为经济类、管理类专业的高等数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/伍宪彬，相丽驰编．—北京：中国铁道出版社，2004.8
ISBN 7-113-06052-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①伍…②相…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 076925 号

书　　名：高等学校教材
　　　　　高 等 数 学
作　　者：伍宪彬　相丽驰　徐园芬　主编
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：李小军　王应玲
编辑部电话：010-83550579
封面设计：石碧容
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
开　　本：730×988　1/16　印张：18.75　字数：330 千
版　　本：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～3 300 册
书　　号：ISBN 7-113-06052-8/O·145
定　　价：23.00 元

前　言

21世纪是信息时代，是知识经济时代，需要造就一大批掌握现代科学理论和现代科学技术的人材。为了这个目的，在浙江万里教育集团和浙江万里学院的组织领导下，由浙江万里学院基础学院数学教师组成《高等数学》编写组，从目前教改状况及发展要求出发，对大纲进行全面的探讨和大胆的改革，力求为培养21世纪人材提供一本具有专业特色的教材。

本书特点是注重基本概念、基本理论和基本技能的训练，并针对专业的需要，尤其是经济类和管理类专业的需求，注重培养学生应用数学知识分析和解决问题的能力。第一章至第五章以一元微积分为主，可以和第十章微分方程构成体系；第六章至第八章介绍的是多元函数微积分；第九章无穷级数可以作为数值计算的工具。各章连贯起来形成了完整的高等数学体系。

本书既保持了高等数学理论的系统性与科学性，又避开了一些非数学专业学生不必掌握的复杂计算和证明技巧。针对经济类和管理类专业的需求，删减了一些远离专业的内容，增加了经济数学模型及经济应用的实例，弥补了以往教材在这方面的不足。在教材的结构和内容上，遵循教学重点向概念和方法的理解上转变，引导学生由浅入深升华所学的知识，最后把其应用到实践中去。

本教材由伍宪彬、相丽驰、徐园芬任主编，袁林忠、吴惠玲、郭金骥任副主编，张春丽老师也参加了部分编写。由许志强副教授、鲁立刚副教授主审。

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中一定存在不足之处，请广大教师和读者提出宝贵意见。

编　者

2004年7月

目 录 ★★★

第 1 章

函数、极限、连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象，是研究微积分及其应用的学科. 而极限方法是研究变量的一种基本方法；连续是函数的一个重要性态，是极限方法的直接应用. 本章将介绍函数、极限、函数的连续的基本概念及性质.

第 1 节　函　　数

所谓函数就是变量之间的对应关系. 函数的概念与基本初等函数的性质和图形在中学已经学过，本节只是中学内容的复习、总结与提高.

1.1　预备知识

1. 常用集合的符号

本书所说的数都是实数. 全体实数的总体称为实数集，记作 $\mathbf{R}$. 这样，数轴上的点的坐标与实数集 $\mathbf{R}$ 建立了一一对应关系.

本书所说的数集都是 $\mathbf{R}$ 的子集，$\mathbf{R}$ 有下列重要子集：自然数集、整数集、有理数集、正实数集，它们分别用符号 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}^*$ 表示. 没有元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如集合 $\{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，就是空集.

若 a 是集合 M 中的一个元素，记作 $a\in M$；若 a 不是集合 M 中的元素，记作 $a\notin M$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必 $x\in B$，就说 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$. 例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$、$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 例如 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,1\}$，则 $A=B$.

由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$.

既属于集合 A，又属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记 $A\cap B$.

2. 区间

符号“$+\infty$”与“$-\infty$”分别读作“正无穷”与“负无穷”. 下面将各种区间的符号、

名称、定义列表表 1-1($a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$).

有限区间与无限区间统称区间,一般的区间通常用 I 表示.

表 1-1 各区间符号、名称和定义

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\|a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		左开右闭区间	$\{x\|a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		左闭右开区间	$\{x\|a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	无穷开区间	$\{x\|x>a\}$
$(-\infty,a)$		无穷开区间	$\{x\|x<a\}$
$(-\infty,+\infty)$		无穷开区间	$\{x\|x\in\mathbf{R}\}$
$[a,+\infty)$		无穷半开区间	$\{x\|x\geqslant a\}$
$(-\infty,a]$		无穷半开区间	$\{x\|x\leqslant a\}$

3. 邻域、内点

对任意的正数 δ,开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,简称点 a 的邻域,记作 $U(a,\delta)$,或简记作 $U(a)$.

数集 $U(a,\delta)-\{a\}$ 称为点 a 的**去心邻域**(或称空心邻域),记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,或简记 $\mathring{U}(a)$.

设 I 为区间,$x\in I$,若存在 x 的邻域 $\mathring{U}(x,\delta)\in I$,则称 x 为 I 的**内点**.显然开区间与无穷开区间都是由其内点组成的.

4. 逻辑符号

符号"$\forall$"表示"任意给定"的意思,如"任意给定的一个实数 x"可记作"$\forall x\in\mathbf{R}$".这里的实数 x 有任意性与给定性两层意思,任意性是指它可代表实数集 $\mathbf{R}$ 中任意一个数,给定性是指 x 一旦从 $\mathbf{R}$ 中取出后,它在数轴上的位置就确定了,它就是一个具体的、固定的数.

符号"$\exists$"表示"存在"的意思.

例如,"$\forall a\in\mathbf{R}$, $\exists$ 自然数 $N\geqslant a$".这是显然成立的命题.事实上,可取 $N=[|a|]+1$.

符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"或"推得".设 A、B 是两个命题,$A\Rightarrow B$ 是指,若 A 成立则 B 成立;或命题 A 蕴涵命题 B.这时,称 A 是 B 的充分条件,也称 B 是 A 的必要条件.

B 的充分条件与 A 的必要条件都不是唯一的.例如

$$n\text{ 是整数}\Rightarrow n\text{ 是有理数}.$$

从上式知,"n 是整数"为"n 是有理数"的充分条件,显然"n 是自然数"也是"n 是有理数"的充分条件;从上式又知,"n 是有理数"是"n 是整数"的必要条件,显然"n 是实数"也是"n 是整数"的必要条件.

符号“$A\Leftrightarrow B$”表示“充分必要”或“等价”，简称“充要”.“$A\Leftrightarrow B$”表示命题A与命题B等价，或命题A蕴涵命题B，同时命题B蕴涵命题A，即“$A\Rightarrow B$”与“$B\Rightarrow A$”同时成立，例如$a^2+b^2=0$的充要条件是$a=0$且$b=0$.

5. 其他符号

符号“max”表示“最大”(它是 maximum 的缩写)；

符号“min”表示“最小”(它是 minimun 的缩写).

例如：$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$中的最大数. $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$中的最小数.

若数集E中有最大数a'与最小数a''. 则写作$a'=\max E$，$a''=\min E$；或写作$a'=\max\limits_{x\in E}\{x\}$，$a''=\min\limits_{x\in E}\{x\}$.

1.2 函数的概念及其图形

1. 常量与变量

自然科学中常出现各种不同性质的量. 例如，在自由落体运动的过程中，有下落时间t、下落距离s两个量. 它们之间的关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，g是重力加速度，一般取$9.8\ \mathrm{m/s^2}$，s和t可以取不同的值.

在某个过程中，保持一定数值的量叫做**常量**；可以取不同数值的量叫做**变量**.

应当注意，常量与变量是对一定的研究过程而言的. 同一个量在某一个过程中是常量，在另一个过程中可能是变量. 例如，在自由落体运动中，重力加速度g是常量；在不同地点研究时，则g不能当作常量而应是变量.

2. 函数

在同一个过程中，几个变量的变化常常不是孤立的，而是按照一定规律相互联系着. 现在先观察两个变量间变化的相依关系.

例 1 设数集$D=\{1,2,3\}$，令1对应3，2对应7，3对应100，这样就建立了数集$\{1,2,3\}$与数集$\{3,7,100\}$之间的一一对应关系.

例 2 考察圆面积A和半径R的相依关系，由公式

$$A=\pi R^2 \qquad (R>0)$$

给出，半径取某一正数时，面积随之由该式确定了惟一的正数值.

下面给出函数的定义.

定义 1 设D是实数集$\mathbf{R}$的非空子集，若对D中每一实数x，对应到惟一的实数y，则这些对应所构成的对应关系f称为函数，记作

$$y=f(x), \qquad x\in D.$$

其中，集合D称为函数的**定义域**，定义域D中的数x所对应的数y称为x的**函数值**，记作$f(x)$. 这时，x称为**自变量**，函数值y或$f(x)$称为**因变量**，函数值的全体称

为函数的**值域**,记作 W,或记作 $f(D_f)$.即

$$W=f(D_f)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

通常用拉丁字母 f、g、h、F、G、H 或希腊字母 φ、ϕ 等来表示函数.在同一研究过程中,不同的问题要用不同的符号来表示.

应注意,在写 $y=f(x)$时,必须把符号 f 与$f(x)$区别开来,f 表示函数的对应关系,而 $f(x)$是表示在定义域中点 x 处的函数值.

函数关系是由定义域、值域和对应法则组成,称这三项为函数的**三个要素**.当函数的三要素确定时,函数即已确定,与自变量、因变量的记号无关,如下面三个函数应该看作是同一个函数.

1. $y=f(x)$　　　　$x\in D$
2. $s=f(t)$　　　　$x\in D$
3. $x=f(y)$　　　　$y\in D$

定义 2　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,则平面直角坐标系 xOy 中的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为**函数的图形**(图 1.1).

例 3　函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$的图形是抛物线(图 1.2).函数 $y=x^3$ 的图形如图 1.3 所示.

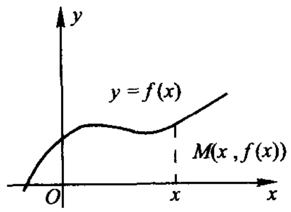

图 1.1

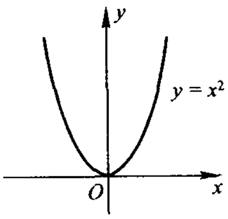

图 1.2

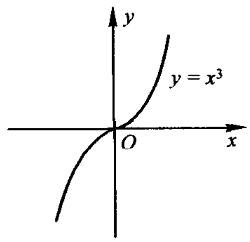

图 1.3

1.3　函数值的表达方式及分段函数

常用的函数表达方式有三种:

1. 列表法

用一张列有一系列自变量值和对应的函数值的表格表示的方法称为**列表法**。如平方根表、三角函数表、对数表等.这种方法表达的函数可以避免麻烦的计算,还可以表达解析式未知的函数,但不够直观,不便作理论分析.

2. 图示法

用坐标平面上的曲线表示函数的方法叫做**图示法**.如指数曲线、对数曲线、三角曲线等.优点是直观性强、可以启迪思维,但不够精确,也不便于理论分析.

3. 解析法

用包含自变量和函数的数学式子表示函数的方法称为**解析法**.如 $y=x$,$y=$

$\sin x$等.优点是便于理论分析和数值计算,是今后常用的研究变量关系的方法.

用解析式表示的函数,若未指出其定义域,则认为使式中函数值有意义的自变量的集合是函数的定义域.

例1 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq1\}$.函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$的定义域为$D_f=\mathbf{R}^*$.

例2 设函数 $f(x)=\begin{cases}x & 当\ x<0\\ 1 & 当\ x=0\\ 2-x & 当\ x>0\end{cases}$.

此函数定义域为 $\mathbf{R}$.

在定义域中几部分分别用不同的解析式表示,这种函数称为**分段函数**.

例3 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & 当\ x\geqslant0\\ x^2+4 & 当\ x<0\end{cases}$,求 $f(x-1)$的表达式.

解 当 $x-1\geqslant0$ 即 $x\geqslant1$ 时,$f(x-1)=2(x-1)+1=2x-1$;

当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时,$f(x-1)=(x-1)^2+4=x^2-2x+5$.

所以,$f(x)=\begin{cases}2x-1 & 当\ x\geqslant1\\ x^2-2x+5 & 当\ x<1\end{cases}$.

1.4 函数的几种常见性态

定义3(有界性) 设函数 $f(x)$在数集 E 上有定义,若存在正数 M 对任意的 $x\in E$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1}$$

则称函数 $f(x)$在 E 上**有界**,这时正数 M 称为$f(x)$在 E 上的界.若 $f(x)$在定义域 D_f 上有界,则称 $f(x)$是**有界函数**.

有了有界函数的概念,如何叙述 $f(x)$在 E 上无界的概念呢?无界是说,任何正数 M 都不是$f(x)$在 E 上的界.即$\forall M>0$,至少有一点 $x_0\in E$,使得

$$|f(x_0)|>M.$$

定义4(单调性) 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若$\forall x_1$、$x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,都有不等式

$$f(x_1)\leqslant f(x_2), \tag{2}$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递增**.

若不等式为 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递减**,单调递增与单调递减的函数统称**单调函数**.

例1 由图1.2知,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上单调递减,在$[0,+\infty)$上是单调递增的.由图1.3知,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调递增的.

定义5(奇偶性) 设函数 $f(x)$的定义域为 D_f,若$\forall x\in D_f$,都有$-x\in D_f$,且

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$是**偶函数**;若满足关系式

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$是**奇函数**.

例 2 设 n 为自然数.函数 $y=x^{2n-1}$,$y=\sin x$,$y=\tan x$都是奇函数.函数 $y=x^{2n}$,$y=\cos x$都是偶函数.在初等数学里已经知道,偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1.2);奇函数的图形关于原点对称(如图 1.3).

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域为 D_f,若存在正数 l,使得

$$\forall x\in D_f \text{ 都有 } x\pm l\in D_f,\text{且 } f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$是以 l 为周期的**周期函数**.若 l 是周期函数$f(x)$的周期,显然 $2l$、$3l$、…也都是 $f(x)$的周期.在这无穷多个周期中,若有一个最小的正周期 T,则 T 称为 $f(x)$的**最小正周期**.通常说的周期都是指**最小正周期**.

注意,不是所有的周期函数都有最小正周期.事实上,常数函数是周期函数,但它没有最小正周期.

1.5 反函数

中学已经学过一一映射、逆映射与反函数的概念,这里进行一些复习.

我们知道,在映射 f 下,若点 x 对应到y,则 y 称为x 的**像**,而 x 称为y 的**原像**.

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义.若 $\forall x_1,x_2\in I$,且 $x_1\neq x_2$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,即点不同,函数值也不同,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是一对一的函数.这时,用反证法易知:对 $\forall y\in f(I)$,在函数 $f(x)$下,y 的原像x 是惟一的.

定义 7 设 $f(x)$在定义域 D_f 上是一对一的函数,则以 $f(D_f)$为定义域,把 $f(D_f)$中的y 对应到y 的原像x,这样就确定了一个新的函数,称为函数 $f(x)$在 D_f 上的**反函数**,记作 $\varphi(y)$.即

$$x=\varphi(y),y\in f(D_f). \tag{1}$$

若函数 $f(x)$在定义域 D_f 上有反函数,此反函数记作 $f^{-1}(y)$,即

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D_f). \tag{2}$$

为便于比较函数的性质(包括图形的特性),也为对函数进行运算,我们通常都把 x 称为自变量,y 称为因变量.为此,通常把(1)、(2)中的 x 与y 对调,写成

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D_f). \tag{3}$$

函数 $f(x)$与反函数 $f^{-1}(y)$的对应关系可表示为

$$\forall x\in D_f \qquad x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{f^{-1}}x;$$

$$\forall y\in f(D_f \qquad y\xrightarrow{f^{-1}}f^{-1}(y)\xrightarrow{f}y.$$

于是可得两个恒等式

$$f^{-1}(f(x))=x \qquad (x\in D_f);$$
$$f(f^{-1}(y))=y \qquad (y\in f(D_f)).$$

从中学数学里还知道，函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$（图 1.4）.

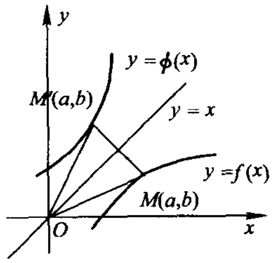

图　1.4

若 $f(x)$ 在 D 上是单调递增（或单调递减）的函数，则它在 D 上是一一映射的函数，从而 $f(x)$ 在 D 上有反函数.

容易证明，单调递增（或单调递减）函数的反函数也是单调递增（或单调递减）的. 事实上，若函数 $f(x)$ 在 D 上单调递增，这时，$f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 的定义域为 $f(D)$. $\forall\, y_1$、$y_2\in f(D)$，且 $y_1<y_2$，设 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$；即 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 是单调递增的，因此只能有 $x_1<x_2$. 这就是说，反函数 $f^{-1}(y)$ 也是单调递增的.

设函数 $f(x)$ 在 D 上有反函数，求 $f(x)$ 的反函数时，可把函数式 $y=f(x)$ 看作是以 x 为未知数的方程，从中解出 D 中的 x，可得以 $f(D)$ 为定义域的反函数 $x=\varphi(y)$，即

$$y=f^{-1}(x)=\varphi(x),x\in f(D).$$

例 1　求 $y=x^2$ 在 $D=[0,+\infty)$ 上的反函数.

解　显然 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递增的，由方程 $y=x^2$ 解得 $x=\pm\sqrt{y}$，因为 $x\geqslant 0$，故得反函数为 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$. 或写作

$$y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty).$$

类似可得 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上的反函数为

$$y=-\sqrt{x},x\in[0,+\infty).$$

例 2　求函数 $f(x)=1+2^x$ 的反函数.

解　显然函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是单调递增的，从而有反函数. $f(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$. 把函数式改写为 $y=1+2^x$，解出 x 得 $f(x)$ 的反函数 $x=\log_2(y-1)$，亦即 $y=\log_2(x-1)$，$x\in(1,+\infty)$.

1.6　函数的四则运算与复合运算

函数除反函数的运算外，还有加、减、乘、除的四则运算与复合运算，有了函数的运算，才能由几个简单的函数构造出许许多多新的函数.

定义 8　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个函数，其定义域分别为 D_f 与 D_g. 若 $D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，$D_0=D_g-\{x\mid g(x)=0,x\in D_g\}\neq\varnothing$，则可在 D 上定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积的运算，可在 D_0 上定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商的运算，运算的结果仍是函数，它们分别记作 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

特别地，常数 C 与函数 $f(x)$ 的乘积记作 $Cf(x)$，如 -1 与 $f(x)$ 的乘积记作 $-f(x)$.

例 1 设 $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

解 $D_f=[-1,+\infty)$，$D_g=[-1,1]$，所以 $D=D_f\cap D_g=[1,-1]$，$D_0=D-\{x\mid g(x)=\sqrt{1-x^2}=0\}=D-\{1,-1\}=(-1,1)$. 因此

$$f(x)\pm g(x)=\sqrt{x+1}\pm\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1];$$

$$f(x)g(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}},x\in(-1,1).$$

定义 10 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 是两个函数，若

$$D=\{x\mid x\in D_g \text{ 且 } g(x)\in D_f\}\neq\varnothing, \tag{1}$$

则可在 D 上定义 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的复合函数，记作 $f(g(x))$，$x\in D$. (2)

例 2 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

解
$$f(g(x))=f(x^2)=\sin x^2,x\in\mathbf{R};$$
$$g(f(x))=g(\sin x)=\sin^2 x,x\in\mathbf{R},$$

显然，$\sin x^2\neq\sin^2 x$，所以，一般说来，复合函数 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 不相等.

例 3 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x^2+4$，求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

解
$$f(g(x))=f(x^2+4)=\sqrt{x^2+4},x\in\mathbf{R};$$
$$g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+4=x+4,x\in[0,+\infty).$$

注意，复合函数 $g(f(x))$ 的定义域不能由最后的函数式 $x+4$ 确定，在复合运算过程中出现 $(\sqrt{x})^2+4$，所以定义域只能是 $[0,+\infty)$.

1.7 基本初等函数的性质与图形

高等数学接触到的函数大多是初等函数，而初等函数是由基本初等函数构成，了解基本初等函数的性质与图形对今后的学习非常重要.

1. 常数函数

$$y=C\qquad x\in\mathbf{R}.$$

其图形为一条平行与 x 轴的直线.

2. 幂函数

$$y=x^\alpha\qquad(\alpha\text{ 为非零常数}).$$

其定义域随指数 α 而定. 一般说来，幂函数在 $\mathbf{R}^+$ 上总有定义. α 为奇数时为奇函数，α 为偶数时为偶函数. 当 $\alpha>0$ 时，右半平面图形过 $(0,0)$，$(1,1)$ 点，函数 $y=x^\alpha$ 在

$\mathbf{R}^*$ 上单调递增；当 $\alpha<0$ 时，右半平面图形过(1,1)点，函数 $y=x^\alpha$ 在 $\mathbf{R}^*$ 上单调递减，坐标轴为渐近线(图 1.5).

3. 指数函数

$$y=a^x \quad (a>0 \quad a\neq1) \quad x\in\mathbf{R} \quad y\in(0,+\infty)$$

图形在上半平面且过点(0,1). $a>1$ 时曲线单调递增；$a<1$ 时，曲线单调递减. $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称(图 1.6).

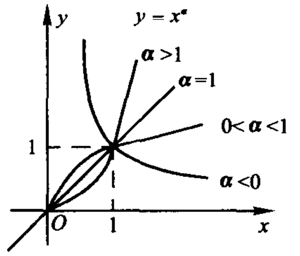

图　1.5

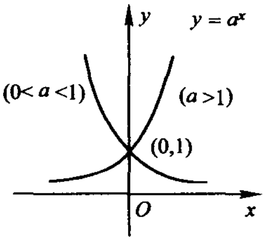

图　1.6

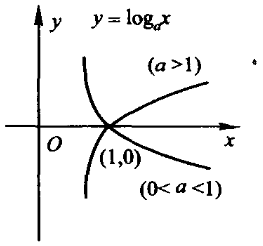

图　1.7

4. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq1) \quad x\in(0,+\infty) \quad y\in\mathbf{R}$$

图形在右半平面且过点(1,0). $a>1$ 时曲线单调递增；$a<1$ 时曲线单调递减. $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数(图 1.7).

5. 三角函数

正弦函数　$y=\sin x, x\in\mathbf{R}, y\in[-1,+1]$;

余弦函数　$y=\cos x, x\in\mathbf{R},\ y\in[-1,+1]$;

正切函数　$y=\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{R}$.

余切函数　$y=\cot x, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{R}$.

正割函数　$y=\sec x, x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{R}$.

余割函数　$y=\csc x, x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{R}$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，前者是奇函数，后者是偶函数. $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数，都是奇函数(如图 1.8～1.11).

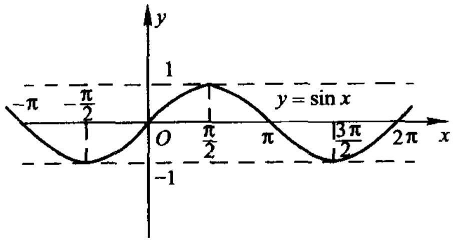

图　1.8

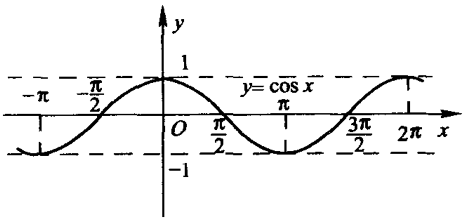

图　1.9

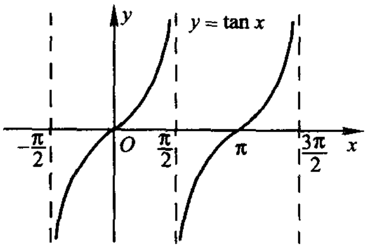

图 1.10

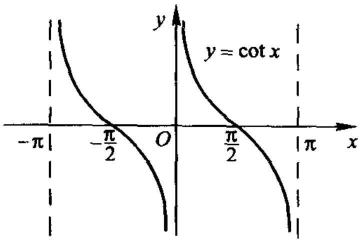

图 1.11

6. 反三角函数

$$y=\arcsin x \quad x\in[-1,1] \quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]; \qquad (\text{图 } 1.12)$$

$$y=\arccos x \quad x\in[-1,1] \quad y\in[0,\pi]; \qquad (\text{图 } 1.13)$$

$$y=\arctan x \quad x\in\mathbf{R} \quad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right); \qquad (\text{图 } 1.14)$$

$$y=\operatorname{arccot} x \quad x\in\mathbf{R} \quad y\in(0,\pi). \qquad (\text{图 } 1.15)$$

上述反三角函数都是定义在三角函数主值区间上的，$y=\arcsin x$与$y=\arctan x$是奇函数，且单调递增，$y=\arccos x$与$y=\operatorname{arccot} x$单调递减.

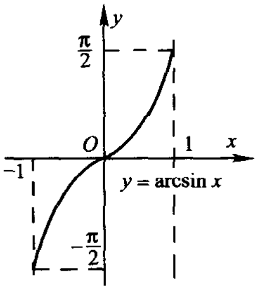

图 1.12

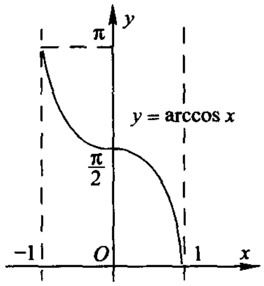

图 1.13

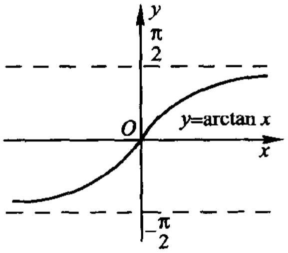

图 1.14

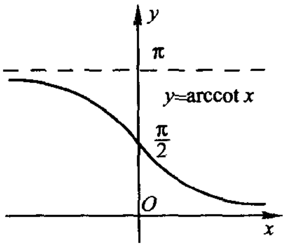

图 1.15

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这六类函数统称为基本初等函数.