邮电高等学校专科教材

概率论与数理统计

陈淦英　赵炳根　编　　蔡宗蔚　审

人民邮电出版社

邮电高等学校专科教材

概率论与数理统计

陈淦英　赵炳根　编
蔡宗蔚　　　　　审

人民邮电出版社

登记证号（京）143号

内 容 简 介

本书共八章，前四章为概率部分，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理。其中分布函数及随机变量函数的分布只作了简单介绍。后四章为统计部分，内容有参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。每章后有小结、习题，书末附有答案。附录部分有排列、组合内容简介。

邮电高等学校专科教材
概率论与数理统计
陈淦英 赵炳根 编
蔡宗蔚 审
*
人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
人民邮电出版社河北印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
*
开本：850×1168 1/32　　1992年6月第一版
印张：7 21/32 页数：124　　1992年6月河北第1次印刷
字数：202千字　　印数：1-2 500册
ISBN7-115-04657-3/G·153
定价：2.65元

编者的话

本书是邮电高校专科数学配套教材（高等数学、线性代数、概率论与数理统计）之一。

概率论与数理统计是研究统计随机现象规律性的一门学科，它的应用已深入到各个领域，现也已成为财经和企业管理人员的必备的知识。本书是为邮政、财经、管理类专科教学编写的，因此在内容上考虑适合财经、管理类专科的需要，尽量用通俗的语言，直观的例子来介绍各种抽象的数学概念，使读者易懂易学，对较深的数学理论只作简单介绍。多元线性回归、方差分析可根据需要作选学内容。习题只选择基本题，以达到巩固概念的目的。

本书也可作相关专业的函授学员自学用。

本书概率部分，第一至第四章由陈淦英编写。统计部分，第五至第八章由赵炳根编写。

编写过程中得到北京邮电学院，西安邮电学院的支持和鼓励。北京邮电学院蔡宗蔚教授审阅了全书，在此向他们表示衷心感谢。

编　者

1991年2月

目　　录

第一章 随机事件

第一节 随机事件与样本空间

在生产和生活中常会遇到两种现象，一种现象在一定条件下一定会发生，如纯净水，在标准大气压力下，100°C时会沸腾，0°C时会结冰，这种现象称为确定性现象；而另一种现象在一定条件下是否发生，具有不确定性，如从次品率为5%的产品中任取20件，并不一定恰有一件次品，这种在一定条件下是否发生具有不确定性的现象，称为随机现象。随机现象在实际生活中是大量存在的。在一次试验中，随机现象具有不确定性，但在相同条件下做大量试验，又会出现一种规律性，概率与数理统计就是研究随机现象规律性的一门学科。

研究随机现象的手段就是"试验"。这里的试验既可指各种科学试验，也包括对事物的某一特征的观察。如

试验1　掷一颗骰子，观察出现的点数；

试验2　掷两颗骰子，观察出现的一对点数；

试验3　100件产品中有4件次品，任抽3件，观察3件中所含的次品件数；

试验4　观察一部机器工作情况（正常？发生故障？）；

试验5　观察某电话交换台在一小时内接到呼叫的次数。

以上这些试验，具有以下两个特点：

(1)在相同条件下，可反复进行；

(2)每次试验的结果不止一个，在试验前可以预料有哪些结果，但究竟出现哪一个，无法预言。

具有这两个特点的试验，称为随机试验，简称试验，并记作

E。以后我们所说的试验都是指的这种试验。

一、随机事件

我们把试验的结果称作事件，有些事件在一次试验后可能发生，也可能不发生，而在大量试验中显示某种规律性，这种事件称为随机事件，用大写字母A、B、C等表示；而在每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用Ω表示；每次试验中必不发生的事件称为不可能事件，用Φ表示。

例1 掷一颗骰子，"出现奇数点"的事件（用A表示"出现奇数点"的事件），"出现的点数小于4"的事件（用B代表"出现点数小于4"的事件）都是随机事件，而"出现点数不超过6"的事件则是必然事件，"出现点数超过6"的事件则是不可能事件。

在随机事件中，有些事件可以看成由若干个事件复合而成的，如例1中的事件A是由出现"1点"、"3点"、"5点"这三个事件复合而成的，这样的事件叫做复合事件。而有些事件不是由其它事件复合而成的，这种事件叫基本事件。如例1中的出现"1点"、"2点"、…"6点"，都是基本事件。

例2 掷两颗骰子作为一次试验，则试验后的可能结果有"1，1"，"1，2"，…"1，6"，"2，1"，"2，2"，…，"2，6"，…"6，6"等共$6^2=36$种。它们都是基本事件。而"点数之和等于6"则是由基本事件"1，5"，"5,1"，"2，4"，"4，2"，及"3，3"复合而成的随机事件；"点数之和大于13"是不可能事件；"点数之和小于13"为必然事件。

为讨论问题方便，将必然事件和不可能事件也作为随机事件。

二、样本空间

为了研究事件间的关系和运算，用点集的概念和图示法比较直

观，容易理解。我们把试验的每个不能再分的结果叫做一个点——样本点。基本事件就是只包含一个样本点的集合，复合事件是包含若干个样本点的集合。所谓某事件发生，就是它所包含的某一样本点在试验中出现。

全部样本点的集合叫样本空间。由于任何一次试验的结果必然出现全部样本点之一，因此样本空间所代表的事件就是必然事件。我们把样本空间也记作Ω。复合事件就是样本空间中的一个子集，基本事件就是样本空间中只包含一个样本点的子集。不可能事件在试验中不可能发生，因此它所对应的集合中没有样本点，也就是空集。

三、概率的统计定义

随机事件的特点是在一次试验后，它可能发生，也可能不发生，在试验前无法预料，且不同的随机事件，发生的可能性不一定相同。自然，我们希望有一个量来反映这种可能性的大小，这个量就是概率。

一名射手，他射击的命中率多大？一批种子，其发芽率是多少？某电话的接通率多大？都可通过大量的试验，统计而得。通过大量试验，统计而得到某事件发生的可能性大小，就是事件发生的概率的统计定义。

定义1.1　设在相同条件下，作了n次试验，其中事件A发生的次数记作m（叫频数）。当试验次数n充分大时，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$稳定地在某一常数p附近摆动，一般，试验次数增多时，这种摆动出现大幅度的情况很稀少，则称常数p为事件A发生的概率。记作

$$P(A)=p$$

表1-1记录了几位有名的数学家所做过的抛掷硬币的试验：设A＝“正面朝上”，由表1-1可见，事件A发生的频率在0.5左右摆动，n增大，一般来说，频率在0.5附近摆动的幅度就小。0.5这

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	出现"正面朝上"的次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

个常数就是抛掷硬币时，"正面朝上"这一随机事件的概率。

因为在 n 次试验中，事件 A 发生的次数 m 满足 $0\leqslant m\leqslant n$，因而 $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$，于是 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；必然事件 Ω 出现的次数 $m=n$，故 $P(\Omega)=1$；不可能事件 Φ 出现的次数 $m=0$，故 $P(\Phi)=0$。

第二节　事件的基本运算法则

一、事件的包含与相等

如果事件 A 发生，则事件 B 必发生，就称事件 B 包含事件 A，记作

$$B\supset A \text{或} A\subset B$$

例1　10件同类产品中有2件次品，现从中任取3件，设

$A=$"恰取到一件次品"

$B=$"至少取到一件次品"

$C=$"最多取到二件正品"

则有 $A\subset B$，$B\subset C$，$C\subset B$。

如果事件 A、B 有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等（或等价）。例 1 中 $B=C$。

两事件相等，实际上是同一事件的两种提法而已。如 $B=$"至

少一件次品”意味着取得的三件产品有两种情况：“一次、二正”或“二次、一正”。而$C=$“最多两件正品也意味着同样的两种可能：“二正、一次”，“一正、二次”。

二、事件的积

“事件A、B都发生”的事件叫做A与B的积。记作$A\cap B$或$A\cdot B$或AB。

例2 设产品由甲、乙两种零件装配而成，记$A=$“零件甲是正品”，$B=$“零件乙是正品”，则$A\cdot B$表示“零件甲、乙都是正品”，因而也表示事件“该产品是正品”。

事件的积也可推广到多个事件的情况。如设产品由5个零件装配而成，记$A_i=$“第i个零件是正品”（$i=1,2,3,4,5$），则$A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5=$“5个零件都是正品”$=$“该产品是正品”。

三、事件互不相容

如果事件A、B不能都发生，即$A\cdot B=\Phi$，则称A与B是互不相容的。

例3 任取一件产品，记$A=$“取到正品”，$B=$“取到次品”，则事件A、B互不相容。

n个事件互不相容，是指其中任意两个事件都互不相容。

例4 设产品分成一等品、二等品及次品三个等级。任取一个，设$A=$“取到一等品”，$B=$“取到二等品”，$C=$“取到次品”，则事件A、B、C互不相容。

四、事件的和

“事件A、B至少发生一件”这样的事件叫做事件A、B的和，记作$A\cup B$或$A+B$。

(1)若A、B互不相容，则$A+B$表示或A、或B发生的事

件；

（2）若A、B相容，则$A+B$表示或A发生，或B发生，或A、B都发生的事件。

例5 在20封信中有4封是本市的，现任取2封，设A_i=“取到i封本市信”（$i=0, 1, 2$）。于是，事件“至少有一封本市信”可由A_1+A_2表示。因A_1、A_2互不相容，因此A_1+A_2表示或A_1发生，或A_2发生。

例6 设产品由甲、乙两种零件装配而成，记A=“零件甲是次品”，B=“零件乙是次品”，显然，A、B可以相容，于是事件$A+B$表示零件甲为次品，或零件乙为次品，或零件甲、乙都是次品这样的事件。也就是表示事件“该产品是次品”。

事件的和也可推广到多个事件的情形，如$A+B+C$表示事件A、B、C中至少发生一件（可以仅发生一件、也包含发生二件或三件都发生）这个事件。

五、对立事件

如果事件A与B有且仅有一件发生，则称事件A与B互为对立事件。记作$A=\overline{B}$或$B=\overline{A}$。

$\overline{A}$表示事件“A不发生”。

事件A与它的对立事件$\overline{A}$间有如下关系：

（1）$\overline{(\overline{A})}=A$

（2）$A\cdot\overline{A}=\Phi$（A与$\overline{A}$不能都发生，最多发生一件）

（3）$A+\overline{A}=\Omega$（A与$\overline{A}$至少发生一件）

在例6中A表示“零件甲是次品”，B表示“零件乙是次品”，$A+B$表示“产品为次品”，$\overline{A+B}$表示“产品为正品”。

六、事件的差

事件A发生而B不发生，这样的事件叫做事件A与B的差，记

作$A-B$。由事件的积，$A-B$可表成$A\cdot\overline{B}$。

例7 设A表示“某产品质量合格”，B表示“该产品包装合格”，则$A-B$表示“质量合格而包装不合格”，而$B-A$表示“包装合格而质量不合格”。

我们用平面上的矩形表示样本空间，用其中的一个圆表示事件，则事件的运算及事件间的关系可以用图1-1表示。

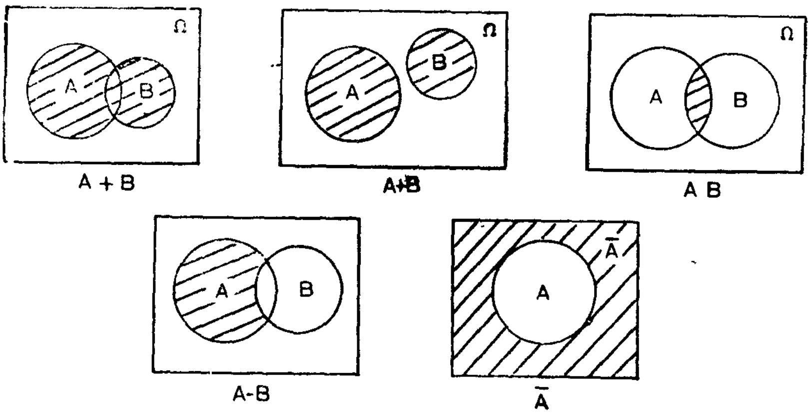

图 1-1

七、事件的运算规律

(1)交换律

$$A+B=B+A$$

$$AB=BA$$

(2)结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(AB)C=A(BC)$$

(3)分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

(4)对偶律

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

前三条很容易用图形来验证，我们现在用例子来解释(4)。

看例6中，

$A=$ “零件甲是次品”

$B=$ “零件乙是次品”

$A+B=$ “产品为次品”

$\overline{A}=$ “零件甲是正品”

$\overline{B}=$ “零件乙是正品”

$\overline{A}\cdot\overline{B}=$ “零件甲、乙都是正品”

$=$ “产品是正品”

$=\overline{A+B}$。

再看例2中

$A=$ “零件甲是正品”

$B=$ “零件乙是正品”

$\overline{A}=$ “零件甲是次品”

$\overline{B}=$ “零件乙是次品”

$AB=$ “产品为正品”

$\overline{AB}=$ “产品为次品”

$\overline{A}+\overline{B}=$ “零件甲、乙至少有一件是次品”

$=$ “产品为次品”

$=\overline{AB}$。

这两个公式也可推广到多个事件：

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n。$$

要注意$\overline{AB}$与$\overline{A}\,\overline{B}$的区别，$\overline{AB}$是$AB$的对立事件，表示不是$A$、$B$都发生，也就是$A$、$B$中至少有一个不发生；而$\overline{A}\,\overline{B}$表示$A$、$B$都不发生。事实上，$\overline{AB}=A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}$。

第三节　古典概型

事件的概率可以通过大量试验，由统计定义得到。用这种方法来求概率需花费大量时间和人力，在无其它办法的情况下，只能这样做。但有些事件的概率，不需做大量试验，经过分析，也能算得。如抛掷硬币，只要硬币是匀称的，那么，不做试验，我们也会想到，“正面朝上”与“正面朝下”的可能性是一样的，也就是P(正面朝上)$=\frac{1}{2}$。那么，具有什么特点的事件，其发生的概率可以不经反复试验而能直接计算得到呢？先看两个例子。

例1　设一个箱子中装有5套衣服，编号分别为1，2，3，4，5，又其中1，2，3号衣服是红色的，4，5号是白色的，从箱中任取一套记为试验E，记$A_i=$“取到第i套衣服”，$i=1，2，3，4，5$。

试验E有以下两个特点：每次试验

(1)有5个可能结果$A_i(i=1，2，\cdots 5)$，且互不相容；

(2)每一结果发生的可能性相同。

若记$A=$“取到一套衣服是红色的”，则容易想到，对于试验E，共有5个基本事件，而事件A包含了其中的三个事件，$A=A_1+A_2+A_3$，于是$P(A)=\frac{3}{5}$。

例2　在上例中，若试验E改为从箱中任取两套衣服，则每次试验

(1)有C_5^2个可能结果$A_i(i=1，2，\cdots 10)$，且互不相容；

(2)每一结果发生的可能性相同。

若记$A=$“取到的两套衣服都是红色的，试验E共有$C_5^2=10$个基本事件，而事件A包含了其中的3个($C_3^2=3$)，因而$P(A)=$

$\frac{3}{10}$。

上面两个例子中的试验都具有两个特点：(1)每次试验有有限个互不相容的结果；(2)每次试验中，每一结果发生的可能性相同。这样的试验叫古典试验。

对于古典试验，若样本空间共有n个基本事件，而事件A由其中的m个基本事件组成，则事件A发生的概率是

$$P(A)=\frac{A\text{中所包含的基本事件个数}}{\text{古典试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}.$$

这n个基本事件称为等概完备事件组。

因这种概率的类型是概率论发展初期的研究对象，故称为古典概型。它是概率论中的一种基本方法。

例3 邮筒内有10封信，其中有8封是外地的，两封是本市的。从中任取两封，(1)有放回地取两次，每次取一封；(2)无放回地取两次，每次取一封。分别求取到的两封都是外地信的概率。

解：(1)有放回地取，它有多少种互不相容的可能结果呢？

第一次是从10封信中任取一封，共10种取法；第二次仍是从10封中任取一封，也有10种取法。一次试验分两步完成，用乘法原理，共有$10\times10=100$种取法，也就是一次试验后有100种互不相容的可能结果，每一结果发生的可能性相同，因此，这样的试验是古典试验，其基本事件总数是100。

"两封都是外地信"这一事件包含多少个基本事件呢？这一事件可由以下取法实现：

第一次从8封外地信中任取一封，共8种取法；第二次仍从这8封中任取一封，也有8种取法，由乘法原理，共8×8种取法，也就是这一事件包含了8×8个基本事件，因此

$$P(\text{两封都是外地信})=\frac{64}{100}=0.64$$

(2)无放回地取，它有多少种互不相容的可能结果呢？第一次

从10封中任取一封，有10种取法，第二次是从剩下的9封中任取一封，有9种取法，因此这样的试验共有10×9种互不相容的可能结果，且每一结果发生的可能性相同，因此这样的试验也是古典试验，它包含10×9个基本事件。

“两封都是外地信”这一事件可以由如下取法实现：

第一次从8封外地信中任取一封，共8种可能取法；第二次从剩下的7封中任取一封，共7种可能取法，由乘法原理，共8×7种取法。也就是这一事件包含了8×7个基本事件，因此

$$P(\text{两封都是外地信})=\frac{8\times 7}{10\times 9}\approx 0.62$$

无放回地取两次，每次取一封，与一次取两封是同样的试验。

例4 一批产品共20件，其中有5件次品，任取4件，求（1）“无次品”，（2）“恰有2件次品”，（3）“至少有一件次品”的概率。

解：任取4件为一次试验，有C_{20}^4种互不相容的可能结果，它们构成一个等概完备事件组，$n=C_{20}^4$。

（1）设$A=$“无次品”，A所包含的基本事件是从15件正品中任取4件的各种互不相容的可能结果，共C_{15}^4个，$m_A=C_{15}^4$，因此

$$P(A)=\frac{C_{15}^4}{C_{20}^4}\approx 0.282$$

（2）设$B=$“正好有二件次品”，它可以这样实现：从15件正品中任取2件，再从5件次品中任取2件，由乘法原理共$C_{15}^2\times C_5^2$种可能结果，$m_B=C_{15}^2\times C_5^2$，于是

$$P(B)=\frac{C_{15}^2\times C_5^2}{C_{20}^4}\approx 0.217$$

（3）设$C=$“至少有一件次品”。在C_{20}^4种不同结果中包括“无次品”、“一件次品”、“二件次品”、“三件次品”及“四件次品”这几种情况。其中除了“无次品”以外，就是“至少一件次品”。因此，“至少一件次品”包含的基本事件个数$m_c=C_{20}^4-$

C_{15}^4，于是

$$P(C)=\frac{C_{20}^4-C_{15}^4}{C_{20}^4}\approx 0.718$$

例5 求40人中至少有二人生日为同月同日的概率。

解：每个人的生日有365种可能，40人的生日共有365^{40}种可能结果，其中，40人的生日都不同的可能有P_{365}^{40}种，至少二人生日相同的可能有$365^{40}-P_{365}^{40}$种，于是

$$P(\text{至少二人生日相同})=\frac{365^{40}-P_{365}^{40}}{365^{40}}\approx 0.89.$$

需要注意，并不是任何试验都是古典试验，如天气预报有晴、阴、多云、雨等多种可能，但它们发生的可能性并不一样。

第四节 概率的加法公式

加法公式（Ⅰ） 如果事件A、B互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-1}$$

这个公式是从大量实践中总结出来的，为了说明方便，我们用古典概型来作说明。

设基本事件总数为n，事件A包含了其中的m_1件，事件B包含了其中的m_2件，因A、B互不相容，事件$A+B$包含了m_1+m_2个基本事件，于是

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

推广，若A_1，A_2，…，A_K互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k) \tag{1-2}$$

这个结论称为概率的有限可加性。

特殊情况，对A及$\overline{A}$用加法公式（1-1）。因A、$\overline{A}$互不相容，有$P(A+B)=P(A)+P(B)$，又$A+\overline{A}=\Omega$，而$P(\Omega)=1$，