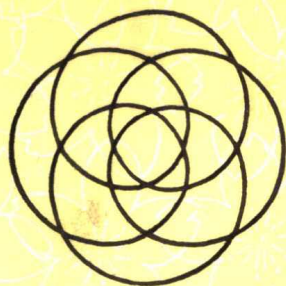


1978

日本全国大学入学考试

数学题解

(上)



一 九 七 八 年

日本全国大学入学考试

数 学 题 解

〔上 册〕

李 开 成 刘 正 一 译

吉 林 人 民 大 学 社

目 录

〔上 册〕

北海道大学	1
岩手大学	17
东北大学	28
筑波大学	39
千叶大学	55
御茶水女子大学	70
东京大学	79
东京工业大学	104
东京水产大学	116
一桥大学	124
长冈技术科学大学	137
新潟大学	145
富山医科大学	157
金泽大学	165
滨松医科大学	177
名古屋大学	185
丰桥技术科学大学	195
三重大学	203
滋贺医科大学	214
京都大学	227

大阪大学	243
神戸大学	255
奈良女子大学	268
鸟取大学	276
岛根医科大学	288

〔中 册〕

冈山大学	297
广岛大学	310
德岛大学	326
高知大学	338
九州大学	346
九州艺术工科大学	357
长崎大学	368
熊本大学	386
大分医科大学	399
宫崎大学	408
琉球大学	421
旭川医科大学	434
小樽商科大学	448
带广畜产大学	462
北见工业大学	471
北海道教育大学	479
室兰工业大学	487
弘前大学	496

秋田大学	506
山形大学	520
茨城大学	533
宇都宫大学	544
群馬大学	551
埼玉大学	563
电气通信大学	579

〔下 册〕

东京医科齿科大学	587
东京学艺大学	594
东京商船大学	602
东京农工大学	611
横滨国立大学	623
富山大学	639
福井大学	653
山梨大学	662
信州大学	671
静冈大学	684
爱知教育大学	701
名古屋工业大学	711
岐阜大学	719
滋贺大学	727
京都教育大学	735
京都工艺纤维大学	744

大阪教育大学.....	752
神戸商船大学.....	760
奈良教育大学.....	767
和歌山大学.....	774
岛根大学.....	781
山口大学.....	791
香川大学.....	800
爱媛大学.....	808
高知医科大学.....	820
九州工业大学.....	828
福岡教育大学.....	839
佐贺大学.....	846
大分大学.....	859
官崎医科大学.....	873
鹿儿岛大学.....	881
〔附〕	
一九七九年日本国立、 公立大学入学考试数学试题.....	894

北海道大学

◇理科系◇

【考期】 3月4日 【时间】 150分 【评分】 120分

1 对于实数 a ($a \neq 1$) 设有

$$C_a = \{(x, y) \mid x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 = 0\},$$

$$D_a = \{(x, y) \mid x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 > 0\}.$$

(1) a 变动时, 试画出圆 C_a 的中心所描绘的图形,

(2) 试求与所有的圆 C_a 相切的直线方程,

(3) 对于 $a < 1$, 试图示出属于 D_a 的所有点的集合。

2 设空间四点: $A(2, -2, 1)$ 、 $B(1, 4, -1)$ 、 $C(1, 1, 3)$ 、 $D(-1, 5, 3)$, 过点 A 、 B 的直线为 l_1 , 过 C 、 D 的直线为 l_2 。

(1) 试求通过 l_1 , 且平行于 l_2 的平面 π 的方程,

(2) 从点 C 向平面 π 引垂线, 垂足为 H , 试求点 H 的座标和线段 CH 的长,

(3) 试证: 线段 CH 的长等于 l_1 上的动点 P 和 l_2

上的动点 Q 的距离的最小值。

3 求解:

(1) 试求满足不等式

$$2(\log_{0.5} x)^2 + 9 \log_{0.5} x + 9 \leq 0$$

的 x 的范围,

(2) x 在 (1) 中求得的范围内变动时, 试求

$$f(x) = (\log_2 \frac{x}{3})(\log_2 \frac{x}{4})$$

的最大值 M 和最小值 L 。

4 设 T 代表同时投掷两个骰子的试验, 试验 T 进行一次时, 出现的点数之差为 X 。

(1) 试求 X 的数学期望 (平均值) $E(X)$ 和方差 $V(X)$,

(2) 独立的把试验 T 重复进行 7 次, 试求 X 取得奇数 3 次以上的概率。

5 设函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + a + 1}{x^2 + 1}$ 当 $x = -\sqrt{3}$ 时有极小值 0,

(1) 求 a, b 的值,

(2) 试求使 $f(x)$ 为极大的 x 的值 C , 然后再求: 曲线 $y = f(x)$ 、 x 轴、 y 轴以及直线 $x = c$ 所围成的面积 S 。

6 计算:

(1) $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t (1 - \sin t)^{\frac{n-1}{2}} dt$ 的值 (n 为自然

数),

(2) 按照 (1) 中求得的 a_n , 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1})$$

的和。

1 (圆的方程)

研究 在 (2) 中直线与圆相切条件虽然可以用判别式, 但用垂线的长来求较为方便。关于 (3), 把 (1)、

(2) 的结果可以画出图进行研究, 仅靠计算来处理也可以。在这种场合, 作为关于 α 的不等式考虑为宜。如果利用图形, (2) 成为下面的样子。

对于 α 的一切值, ($\alpha \neq 1$), 圆 C_α 的中心在直线 $x+y=2$ 上, 且 C_α 过此直线上的点 (1, 1), 而且, 当 $\alpha < \beta < 1$ 或 $1 < \beta < \alpha$ 时, 由于圆 C_α 包含于圆 C_β 中, 那么和所有的圆相切的直线的切点是 (1, 1)。从而所求直线为 $y=x$ 。

解答 (1) 把圆 C_α 改写为

$$(x-\alpha)^2 + \{y+(\alpha-2)\}^2 = 2(\alpha-1)^2,$$

设圆的中心为 (X, Y) , 则

$$x=\alpha, Y=-(\alpha-2), (\alpha \neq 1).$$

消去 α , $X+Y=2$, ($X \neq 1$)。

所以, 圆的中心在直线 $X+Y=2$ 上变动。但是对应于 $x=1$ 的点 (1, 1) 除外。

(2) 设所求直线为 $ax+by+c=0$, 因为从圆心 $(\alpha, -(\alpha-2))$ 引垂线长等于半径 $\sqrt{2}|\alpha-1|$, 则有

$$\frac{|a\alpha + b(-\alpha + 2) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}|\alpha - 1|, (\alpha \neq 1)$$

两边平方后化为

$$(a+b)^2\alpha^2 - 2\{2(a^2+b^2) + (a-b)(2b+c)\}\alpha + \{2(a^2+b^2) - (2b+c)^2\} = 0.$$

此式关于 α 为恒等的条件是

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 0, & \text{①} \\ 2(a^2+b^2) + (a-b)(2b+c) = 0, & \text{②} \\ 2(a^2+b^2) - (2b+c)^2 = 0, & \text{③} \end{cases}$$

成立。

由第①式, $a = -b$,

再由第②式, $ac = 0$,

再由第③式, $4ac - c^2 = 0$,

于是得到: $a = -b (\neq 0)$, $c = 0$, 故所求直线为 $y = x$.

… (答)

(3) $x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 > 0$ 变形为

$$-2a(x-y) + x^2 + y^2 - 4y + 2 > 0,$$

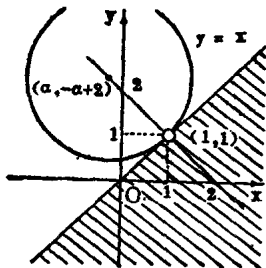
$$\therefore 2(1-a)(x-y) + (x-1)^2 + (y-1)^2 > 0.$$

因为 $(x, y) \neq (1, 1)$ 时,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 > 0,$$

为使对 $a < 1$ 的一切 a 都成立, 则 $y \leq x$.

所求范围如左图斜线部分, 包括除点 $(1, 1)$ 的边界。



2 (直线、平面的方程)

解答 (1) 因为含有二点 A 、 B

的平面 π 包含直线 l_1 , 设平面 π 的方程为 $ax+by+cz+d=0$, 则

$$2a-2b+c+d=0, \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a+4b-c+d=0, \quad \cdots \textcircled{2}$$

又直线 l_2 的方向数比是 $2:-4:0=1:-2:0$, l_2 与 π 平行, 故

$$a-2b+0c=0, \quad \cdots \textcircled{3}$$

根据①、②、③得

$$a:b:c:d=2:1:2:-4,$$

故所求平面方程为 $2x+y+2z-4=0$. $\cdots \textcircled{4}$ (答)

(2) 过 C 且垂直于 π 的直线是

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}, \quad \cdots \textcircled{5}$$

解 ④、⑤得 $x = -\frac{1}{9}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = \frac{17}{9}$, 应用两点间距离公式:

$$CH = \sqrt{\left(-\frac{1}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{17}{9}-3\right)^2} = \frac{5}{3},$$

$$(\text{答}) H\left(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{17}{9}\right), CH = \frac{5}{3}.$$

(3) 因为 CH 的方向比为 $2:1:2$, 则有 $CH \perp l_1$ 且 $CH \perp l_2$, 故 CH 的长等于 l_1 、 l_2 上的点的最短距离。

3 (对数不等式, 二次函数图象)

研究 (1) 宜设 $\log_{0.5} x = X$, 更要留意 $\log_{0.5} x$ 是单调减函数。

(2) 设 $\log_2 x = u$, 求附有条件的二次式的最大值、最小值就行了。然后, 再考虑到二次函数的图形。

解答 (1) $2(\log_{0.5} x)^2 + 9 \log_{0.5} x + 9 \leq 0$,

$$\therefore (2 \log_{0.5} x + 3)(\log_{0.5} x + 3) \leq 0,$$

$$\therefore -3 \leq \log_{0.5} x \leq -\frac{3}{2},$$

$$\therefore (0.5)^{-3} \geq x \geq (0.5)^{-\frac{3}{2}}, \therefore 2\sqrt{2} \leq x \leq 8. \dots (\text{答})$$

(2) 对 (1) 中的 x $\frac{3}{2} \leq \log_2 x \leq 3$, 所以设 $\log_2 x = u$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log_2 \frac{x}{3}\right) \left(\log_2 \frac{x}{4}\right) = (u - \log_2 3)(u - 2), \\ &= u^2 - (2 + \log_2 3)u + 2\log_2 3, \\ &= \left(u - \frac{2 + \log_2 3}{2}\right)^2 + 2\log_2 3 - \left(1 + \frac{1}{2}\log_2 3\right)^2, \\ &= \left(u - \frac{2 + \log_2 3}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\log_2 3\right)^2. \end{aligned}$$

可是 $\frac{2 + \log_2 3}{2} = \log_2 \sqrt{12}$, 所以 $\frac{3}{2} < \log_2 \sqrt{12} < 3$, 且

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 3\right) &= \log_2 \sqrt{12} - \frac{9}{4} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}} < \log_2 1 = 0, \end{aligned}$$

可见抛物线的轴靠近 $u = \frac{3}{2}$ 。因而, $f(x)$ 当 $u = 3$

从而当 $x = 8$ 时取得最大值: $3 - \log_2 3$ 。

$$u = \frac{2 + \log_2 3}{2}, \text{ 从而当 } x = 2\sqrt{3} \text{ 时取最小值: } -\left(1 - \frac{\log_2 3}{2}\right)^2,$$

$$(\text{答}) M = 3 - \log_2 3; L = -\left(1 - \frac{1}{2}\log_2 3\right)^2.$$

4 (概率分布)

研究 (1) 设 $X=r$ 的概率为 $P(r)$, 则有

$$E(x) = \sum r P(r), V(X) = E(x^2) - (E(x))^2,$$

(2) X 呈奇数的概率设为 p , 呈偶数的概率设为 q ,
 X 取得奇数 3 次以上的概率为:

$$\begin{aligned} & C_7^3 P^3 q^4 + C_7^4 P^4 q^3 + C_7^5 P^5 q^2 + C_7^6 P^6 q + C_7^7 p^7 \\ &= 1 - (C_7^0 q^7 + C_7^1 p q^6 + C_7^2 p^2 q^5) \end{aligned}$$

为此, 先求出余事件的概率, 然后从 1 减去余事件的概率即可。

解答 (1) u 表示 $X=r$ 情况的个数, 依次计算 $P(r) = \frac{u}{36}$, $rP(r)$ 等, 再求出 $E(X)$ 、 $V(X)$, 得下表

r	u	$P(r)$	$rP(r)$	r^2	$r^2 P(r)$
0	6	$\frac{3}{18}$	0	0	0
1	10	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	1	$\frac{5}{18}$
2	8	$\frac{4}{18}$	$\frac{8}{18}$	4	$\frac{16}{18}$
3	6	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{18}$	9	$\frac{27}{18}$
4	4	$\frac{2}{18}$	$\frac{8}{18}$	16	$\frac{32}{18}$
5	2	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	25	$\frac{25}{18}$
和	36	1	$E(X) = \frac{35}{18}$		$E(X^2) = \frac{105}{18} (= \frac{35}{6})$

$$\therefore E(X) = \frac{35}{18}, V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{665}{324}$$

∴ (答)

(2) 由上表, 进行一次试验, X 是奇数的概率以及是偶数的概率都是 $\frac{1}{2}$, 从而重复进行 7 次试验, X 在不足 3 次试验中呈奇数的概率为

$$C_7^0 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_7^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_7^2 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1+7+21}{128} = \frac{29}{128},$$

因而, 所求概率为 $1 - \frac{29}{128} = \frac{99}{128}$ (答)

5 (函数的增减与极值, 面积计算)

研究 $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ 时 $f'(x)$

$$= \frac{p(x)q'(x) - q(x)p'(x)}{(p(x))^2},$$

所以, 由若在 $x = a$ 有极值应 $f'(a) = 0$ 得关系式

$$f'(a) = \frac{q'(a)}{p'(a)} = \frac{q'(a)}{p'(a)}.$$

解答(1) $f'(x) = \frac{(x^2+1)(2ax+b) - 2x(ax^2+bx+a+1)}{(x^2+1)^2},$

因为当 $x = -\sqrt{3}$ 时有极值 0, 所以令

$$f'(-\sqrt{3}) = 0 \quad \text{得} \quad b = \sqrt{3}.$$

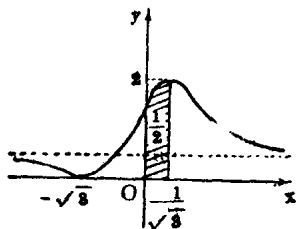
又由 $f(-\sqrt{3}) = 0$, 得 $a = \frac{1}{2}$.

则 a, b 的值适合所求。

$$(答) \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \sqrt{3}.$$

(2) 因 $f'(x) = \frac{-(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^2}$, 所以

$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 处取极大值 2。因而 $y = f(x)$ 的草图如下图所示。故



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}{2(x^2 + 1)} dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \log(x^2 + 1) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{4}{3} + \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{6} (\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \log \frac{4}{3} + \pi).
 \end{aligned}$$

… (答)

〔注意〕 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$, 设 $\operatorname{tg} \theta = x$, 化为 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$ 求出之。

6 (定积分的计算, 无穷级数)

研究 (1) 以 $\sin t = u$ 置换, 化做简单的部分积分问题。在 (2) 中变做 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ 。对此或者把分子变形为 $a(n+4) + (b-4a)$ 分成两个, 或者分成部分分数。多数的场合, 以前法比较容易。

解答 (1) 设 $\sin t = u$, $\cos t dt = du$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (1 - \sin t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t dt = \int_0^1 2u(1-u)^{\frac{n-1}{2}} du, \\
 &= \left[2u \left\{ -\frac{2}{n+1} (1-u)^{\frac{n+1}{2}} \right\} \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ -2 \cdot \frac{2}{n+1} \right. \\
 &\quad \left. (1-u)^{\frac{n+1}{2}} \right\} du, = \frac{8}{(n+1)(n+3)}. \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\sum_{n=1}^m (n+1)(a_n - a_{n+1}), \\
 &= \sum_{n=1}^m (n+1) \left\{ \frac{8}{(n+1)(n+3)} - \frac{8}{(n+2)(n+4)} \right\}, \\
 &= \sum_{n=1}^m \frac{8(2n+5)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \\
 &= \sum_{n=1}^m \frac{16(n+4) - 24}{(n+2)(n+3)(n+4)}, \\
 &= \sum_{n=1}^m \frac{16}{(n+2)(n+4)} - \sum_{n=1}^m \frac{24}{(n+2)(n+3)(n+4)}, \\
 &= 16 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+3} \right) - 12 \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{(m+3)(m+4)} \right).
 \end{aligned}$$

故所求和为 $\frac{16}{3} - \frac{12}{3 \cdot 4} = \frac{13}{3}$ (答)

◇ 文 科 系 ◇

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 120分钟 〔评分〕 100分

1 关于实数 x, y 由下述条件 A 确定:

$$A: x \geq 0 \text{ 且 } x^2 - 29y^2 \geq 0.$$

(1) 点 (x, y) 同时满足条件 A 和 $5y - x + 2 \geq 0$, 求 y 的范围。

(2) 试求同时满足条件 A 和 $5y - x + 2 = 0$ 的一切整数数组 (x, y) 。

2 关于定义在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 上的函数: $f(\theta) = a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta + 2a \sin \theta$ 。

回答下列各问。其中, a, b 是实数且 $a \neq 0$ 。

(1) 试证满足 $f(\theta) = 0$ 的 θ 值有二个;

(2) 如果 $f(\theta)$ 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时有最大值 7, 试求 a 和 b 的值。

3 在 $\triangle ABC$ 中, 使 $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{AR} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ 的点 Q, R 分别在 AC, AB 上。设线段 BQ, CR 交于点 I , 线段 AI 的延长线和边 BC 交于点 P 。

(1) 试用 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 表示 $\vec{BQ}, \vec{CR}$,

(2) 如果 $\vec{AI} = \vec{AB} + \lambda \vec{BQ} = \vec{AC} + \mu \vec{CR}$, 试求 λ, μ ,

(3) 试证: $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{BC}$, 并求 $\triangle PQR$ 和 $\triangle ABC$ 的面积之比。

4 讨论适合下列 (a)、(b) 的语言:

(a) 用 7 个相异的文字, 其中 3 个是元音字母、4 个是辅音字母。

(b) 满足下列 4 个条件的文字, 排成一列的叫做单词。但是也包括一个文字的情形。

① 由 8 个以下的文字组成,

② 必须用元音字母结尾,