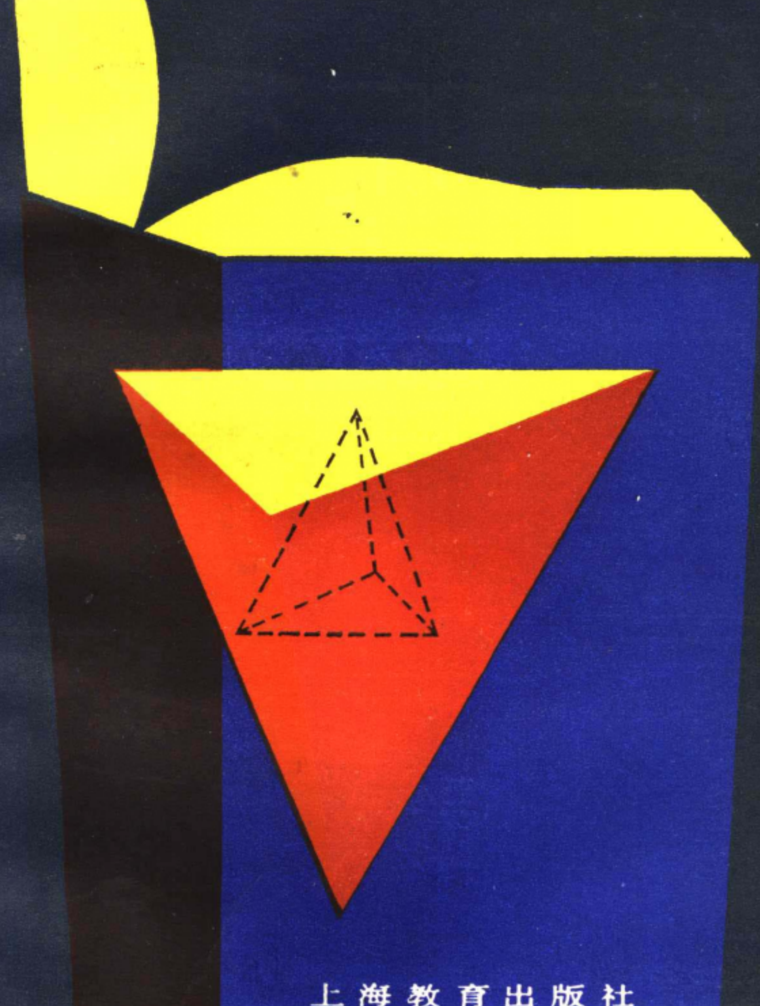
从平面到空间



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

从平面到空间

蒋 声

上海教育出版社

责任编辑　韩希塘
封面设计　范一辛

中学生文库　　从平面到空间
蒋　声

上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 3.5　插页 2　字数 63,000
1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷
印数 1—8,300 本

ISBN 7-5320-1149-6/G·1120　　定价：1.10元

前言

学习立体几何的一条最基本的经验，就是充分利用平面几何的成果．平面几何的概念、定理、解题方法、常见题型、对图形的直觉等，都可移入立体几何，经过丰富、发展和变化，发挥出更大的威力，解决更多、更复杂的问题．

在这本小册子里，我们将通过许多例题、习题、试题和竞赛题，进行一番探讨，看看从平面几何到立体几何有些什么规律可循？平面几何中作辅助线的经验，能否对立体几何提供帮助？解答平面几何常见题型的基本思路，是否对立体几何依然有效？平面几何中的各种熟知结论，能够带给立体几何怎样的启示？怎样利用类比和推广，从平面几何中的已知事实引出一系列有趣的新结果？这样尝试的目的，不仅是要带给你新鲜感和趣味感，也不只是告诉你几个结论和几种解题方法．你将从阅读和解题中发现，你不但能够独力分析问题和解决问题，而且能逐步学会怎样自己发现问题和确切地提出问题．

在学习立体几何时，常说："平面几何研究平面图形，立

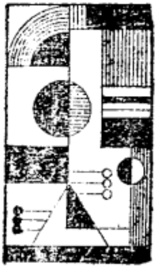
体几何研究空间图形．”从平面几何到立体几何，视野从一个平面扩展到整个空间．但是这里所说的“空间”，仍是直观的三维空间．本书的最后一节将以简短的一瞥，介绍一条走向 n 维空间的通道．

在本书中包含着一些尝试，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正．

蒋　声

1988年3月于扬州师范学院

目　录



一　辅助线和辅助面、辅助体

很多平面几何问题都需要添辅助线．平面几何里作辅助线的经验，对立体几何有无参考价值呢？

先看一道常见的平面几何题：

［例 1］　证明以任意四边形各边中点为顶点的四边形是平行四边形．

证明　如图 1.1，设四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点．连 BD，则由 $\triangle ABD$，应用中位线定理，得

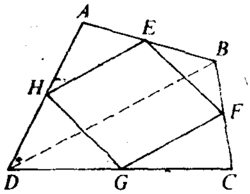


图　1.1

$$EH \parallel BD,\ EH=\frac{1}{2}BD.$$

同理，由 $\triangle CBD$，得

$$FG \parallel BD,\ FG=\frac{1}{2}BD.$$

$$\therefore\quad EH \parallel FG,\ EH=FG.$$

由此推出，四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

现在来看立体几何中一道类似的常见习题．

[例 2]　证明空间四边形各边中点是一个平行四边形的四个顶点.

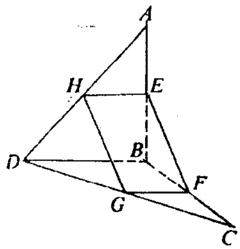


图　1.2

证明　如图 1.2，设在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点. 连 BD，则由 $\triangle ABD$ 得

$$EH \parallel BD,\ EH=\frac{1}{2}BD,$$

由 $\triangle CBD$ 得

$$FG \parallel BD,\ FG=\frac{1}{2}BD.$$

$$\therefore\quad EH \parallel FG,\ EH=FG.$$

所以两直线 EH、FG 共面，并且 $EFGH$ 是这个平面上的平行四边形.

例 2 的证明的思路，与例 1 几乎完全相同，只不过把平面四边形换成了空间四边形. 有了解答例 1 时添加辅助线的经验，解答例 2 时，很快就会想到作辅助线 BD，使问题迎刃而解. 由此可见，我们应该重视平面几何中作辅助线的经验，在解答立体几何问题时注意从这些宝贵经验中寻找启示.

我们能够从例 1 吸取的养料，并不只是例 2 中的辅助线作法. 例 1 是一道基本的平面几何题，在它的基础上，加以引伸和变化，可以演变出一连串新的平面几何题. 可以预料，仿照例 1 的引伸和变化，可以从例 2 演变出一连串新的立体几何题.

从例 1 能演变出哪些平面几何题呢?

首先,由 $EFGH$ 是平行四边形,可推出 EG 与 FH 互相平分.

其次,在上面证明例 1 时,通过连结 BD,证明了

$$EH \perp\!\!\!\!= FG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2} BD.$$

如果改为连结 AC,则可类似地证明

$$EF \perp\!\!\!\!= HG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2} AC.$$

由此得到下面两个结论:

1. 若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 互相垂直,则其各边中点是一个矩形的顶点;

2. 若四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=BD$,则其各边中点是一个菱形的顶点.

特殊地,由于菱形的对角线互相垂直,矩形的对角线相等,所以从结论 1 和 2 导出下列重要特殊情形:

3. 以菱形各边中点为顶点的四边形是矩形.

4. 以矩形各边中点为顶点的四边形是菱形.

在解答这些演变出来的平面几何题时,不能把例 1 当成定理引用,但是可以根据例 1 作辅助线的经验,连结四边形的对角线,以对角线为桥梁,把条件和结论联系起来.

仿照这些平面几何题的演变方式,在立体几何中,能够从例 2 演变出哪些问题来呢?

下面的例 3～例 8 都是从例 2 演变出来的. 为了节省

篇幅，在各个例题的证明中，都直接引用前面的例题的结果,不重复写出有关结果的证明过程.

[例 3] 空间四边形两双对边中点的连线共点，并且被这一点平分.

证明 如图1.3，设空间四边形 $ABCD$ 中, E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点. 由例 2,得 $EFGH$ 为平行四边形. 因而,由 $\square EFGH$ 得 EG 与 FH 相交于一点 O，且 EG 和 FH 都被 O 点平分.

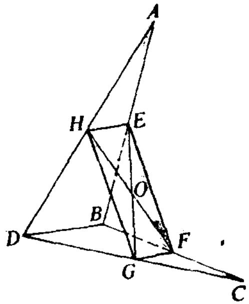


图 1.3

证明本题时,如不引用例 2,需作辅助线 BD.

[例 4] 四面体的三双对棱中点的连线共点，并且被这点平分.

证明 如图1.4，设在四面体 $ABCD$ 中, E、F、G、H、K、L 分别是棱 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点. 利用例 3，从空间四边形 $ABCD$，得 EG 与 FH 相交于一点 O，且 EG 和 FH 都被 O 点平分，即

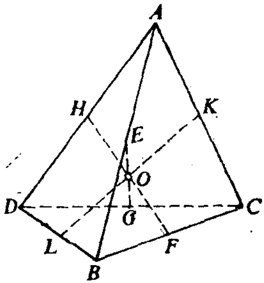


图 1.4

线段 EG 和 FH 有公共的中点 O. 同理，线段 KL 与 EG 有公共的中点，即 O 点也是 KL 的中点. 所以四面体 $ABCD$ 的三双对棱中点的连线 EG、FH 和 KL 通过同一

点 O，并且三条连线都被 O 点平分.

本题在证明时，如不引用例3，需作辅助线 EF、FG、GH、HE.

[例5] 若四面体的一双对棱互相垂直，则另两双对棱中点的连线相等.

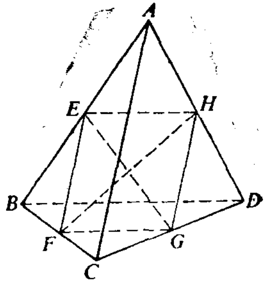


图 1.5

证明 如图1.5，设在四面体 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，E、F、G、H 是棱 AB、BC、CD、DA 的中点，要证明 $EG=FH$. 为此，连 EF、FG、GH、HE，则由 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 得

$$EF\parallel AC\parallel HG,$$

由 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 得

$$EH\parallel BD\parallel FG.$$

而 $AC\perp BD$，所以四边形 $EFGH$ 是矩形，因而 $EG=FH$.

[例6] 若四面体的各个面都是互相全等的三角形，则其三双对棱中点的连线两两互相垂直.

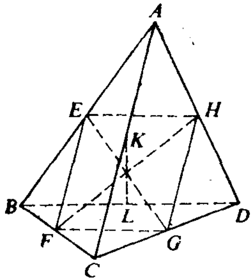


图 1.6

证明 如图1.6，设四面体 $ABCD$ 的各个面都是互相全等的三角形，E、F、G、H、K、L 分别是棱 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点. 设

$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，

则由四面体的各个面都是全等的三角形，得

$$AD=a,\ BD=b,\ CD=c.$$

连 EF、FG、GH、HE，则由 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 得

$$EF=\frac{AC}{2}=\frac{b}{2},\ HG=\frac{AC}{2}=\frac{b}{2};$$

由 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 得

$$EH=\frac{BD}{2}=\frac{b}{2},\ FG=\frac{BD}{2}=\frac{b}{2}.$$

$$\therefore\quad EF=HG=EH=FG.$$

此外还有 $EF\parallel AC\parallel HG$，因而 E、F、G、H 在一平面内，所以四边形 $EFGH$ 是菱形．由此得到

$$EG\perp HF.$$

同理可证 $\qquad EG\perp KL,\ HF\perp KL.$

[例 7] 四面体 $ABCD$ 中，M 是 AD 的中点，N 是 BC 的中点，$AB=CD$，求证 $MN<AB$.

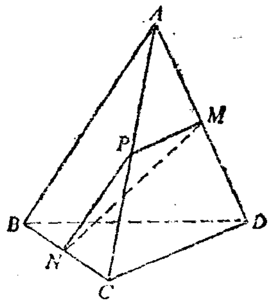


图 1.7

证明 如图 1.7，设 P 是 AC 的中点，连 PM、PN，则由 $\triangle ABC$，得

$$PN=\frac{1}{2}AB;$$

由 $\triangle ACD$，得

$$PM=\frac{1}{2}CD;$$

由 $\triangle MNP$，得

$$MN<PN+PM.$$

由以上三式得

$$MN<\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD. \tag{1}$$

但是已知 $AB=CD$, 所以最后得到

$$MN<AB.$$

[例 8] 四面体中，设三双对棱中点连线的长分别为 m、n、p, 六棱之和为 s, 则

$$\frac{s}{4}<m+n+p<\frac{s}{2}.$$

证明 如图1.8，设在四面体 $ABCD$ 中，E、F、G、H、K、L 分别是棱 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点. 仿照例 7 中推导(1)式的过程，连 HK、KF，得

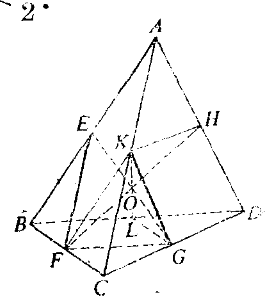


图 1.8

$$HF<HK+KF,$$

$$HK=\frac{1}{2}CD,$$

$$KF=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore\quad HF<\frac{1}{2}(AB+CD).$$

同理，连 EF、FG，可得

$$EG<\frac{1}{2}(AC+BD);$$

连 KG、GL，可得

$$KL<\frac{1}{2}(AD+BC).$$

将上面三个不等式相加，并且注意三双对棱中点连线 EG、FH、KL 的长为 m、n、p，六棱之和为 s，就得到

$$m+n+p<\frac{s}{2}.$$

另一方面，根据例 4，EG、FH 和 KL 交于一点 O，并且被 O 点平分．所以，如果设 $EG=m$，$FH=n$，就有

$$OE=OG=\frac{m}{2},\quad OF=\frac{n}{2}.$$

从 $\triangle OEF$ 得 $OE+OF>EF$，即

$$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}>\frac{1}{2}AC.$$

从 $\triangle OFG$ 得 $OG+OF>FG$，即

$$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}>\frac{1}{2}BD.$$

两式相加，得

$$m+n>\frac{1}{2}(AC+BD).$$

同理

$$n+p>\frac{1}{2}(AB+CD),$$

$$p+m>\frac{1}{2}(AD+BC).$$

将以上三个不等式相加，再除以 2，得到

$$m+n+p>\frac{s}{4}.$$

综合以上两方面的结果，最后得到

$$\frac{s}{4}<m+n+p<\frac{s}{2}.$$

上面的例3～例8都是从例2引伸和变化出来的立体几何题. 由于这里叙述它们时，是逐步演变而来，因而很容易看出应该添什么辅助线，采取什么办法来证明. 如果在某个陌生的场合，单独看到其中某一道题，能不能还是这样轻松地发现证明方法呢？如果注意向平面几何证题经验借鉴，就容易发现应从何处下手. 通过分析题型，可以看出，上面的几道立体几何题都涉及线段中点的连线. 在平面几何中，处理这类问题，可以用三角形的中位线定理：三角形中，两边中点的连线平行于第三边，且等于第三边之半. 在一个空间图形的不同平面内分别应用三角形中位线定理，再与立体几何中的平行的传递性、异面直线的夹角、两平行直线共面等定理结合起来，就能解决很多问题.

解答立体几何问题，除去常需作辅助线而外，还经常用到辅助面或辅助体. 在考虑如何作辅助面或辅助体时，也可从平面几何的辅助线作法获得启示.

先看作辅助面的例子. 还是从平面几何题谈起.

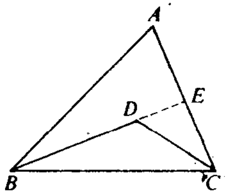


图 1.9

[例9] 设 D 是 $\triangle ABC$ 内部的一点，求证

$$AB+AC>DB+DC.$$

证明 如图1.9，延长 BD，交 AC 于 E. 由 $\triangle ABE$

得

$$AB+AE>BE;$$

由 $\triangle DEC$ 得

$$DE+EC>DC.$$

两式相加，并注意 $BE=BD+DE$，得

$$AB+(AE+EC)+DE>(BD+DE)+DC,$$

$$\therefore\quad AB+AC>DB+DC.$$

例 9 证明的关键，是通过作辅助线造成适当的三角形，然后反复应用"三角形两边之和大于第三边"，得到所需的结论.

在立体几何中，有一个对应的定理：三面角的任意两个面角的和大于第三个面角.

因此，仿照例 9，容易解答下面的立体几何问题.

[例 10] 设射线 VD 在三面角 $V-ABC$ 的内部，求证

$$\angle AVB+\angle AVC>\angle DVB+\angle DVC.$$

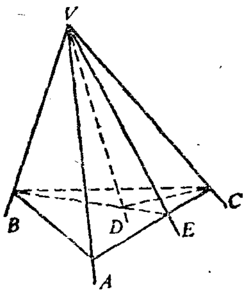


图 1.10

证明 如图 1.10，设平面 VBD 交平面 VAC 于 VE，则由 VD 在三面角 $V-ABC$ 内部，得 VD 在 $\angle BVE$ 内部，VE 在 $\angle AVC$ 内部. 由三面角 $V-ABE$ 得

$$\angle AVB+\angle AVE>\angle BVE;$$

由三面角 $V-DEC$ 得

$$\angle EVC+\angle DVE>\angle DVC.$$

将上面两个不等式相加，得

$$\angle AVB+(\angle AVE+\angle EVC)+\angle DVE$$
$$>\angle BVE+\angle DVC.$$

再利用 $\angle AVE+\angle EVC=\angle AVC,$

$$\angle BVE=\angle BVD+\angle DVE,$$

就得到 $\angle AVB+\angle AVC>\angle DVB+\angle DVC.$

从例 10 可以变化出下面的问题.

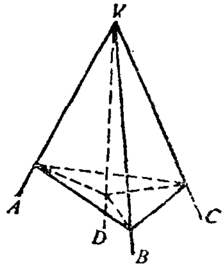


图 1.11

[例 11] 设三面角的三个面角为 α、β、γ，过顶点在三面角内部作的任一射线与各棱的夹角为 m、n、p，证明：

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)<m+n+p$$
$$<\alpha+\beta+\gamma.$$

证明 如图 1.11，设在三面角 $V-ABC$ 中，$\angle BVC=\alpha$，$\angle CVA=\beta$，$\angle AVB=\gamma$，VD 是三面角内部的射线 $\angle DVA=m$，$\angle DVB=n$，$\angle DVC=p$. 那么由例 10，得

$$\angle DVA+\angle DVB<\angle CVB+\angle CVA,$$

即 $$m+n<\alpha+\beta.$$

同理可得 $$n+p<\beta+\gamma.$$

$$p+m<\gamma+\alpha.$$

把上面三个不等式相加，再除以 2，得到

$$m+n+p<\alpha+\beta+\gamma. \tag{1}$$