中学代数常用解题方法

曹德荣

广西教育出版社

中学代数常用解题方法

曹德荣　编著

广西教育出版社

中学代数常用解题方法
曹德荣　编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市民族大道7号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　3.625印张　77,000字
1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
印数 1—7,000 册
ISBN 7—5435—0435—9/G·365
定价：1.05 元

前　言

学习数学这一学科，不但要掌握它的基础知识和基本技能，更重要的是要通过学习，培养运用这些知识解决问题的能力。好象盖房子一样，我们不但要收集必需的材料，而且要用这些材料把房子盖起来。数学能力的培养与考查，一般是通过解题来进行的，所以，我们应当注意解题能力的培养。

培养和提高解题能力是一个长期复杂的过程，而加强基本功的训练，熟练掌握一些常用的解题方法，是其中重要的一环。当代美国著名的数学家和数学教育家乔·波利亚(George Polya)，在他的名著《怎样解题》一书中指出，在启发学生探索解题方法，拟定解题计划时，首先要学生考虑："你知道一个与此有关的问题吗?"这样做常常有助于激发一连串正确的想法。由此可见如果我们能够熟练地掌握一些常用的解题方法，了解它们的基本原理，明确在哪些情况下，一般可以考虑采用哪一种方法；并通过阅读一定数量的例题和适当演算一些习题，做到能根据具体情况，灵活运用这些方法，那么，一题到手，就容易引起一系列有用的联想与类比，进行正确的分析思考，解题能力就会显著地提高。

在中学的代数教科书中，除了对数学归纳法有专章论述外，一般对于解题方法和技巧缺乏明确和系统的介绍。为了帮助同学们比较系统地掌握代数这一分科中一些常用的解题方法，作者参考历年所见到的一些数学书刊中有关的论述和

例题，结合自己的教学体会，根据大多数中学生的接受能力，试编了这一本册子，供中学生课外参考阅读，希望能对提高读者的解题能力有所帮助。但限于水平，虽则有心集腋，却也未必成裘，欢迎读者批评指正。

编著者

目　录

一、分段讨论法

绝对值是一个重要的概念，可以用式子表示为：

$$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

处理含有绝对值符号的解析式$|F(x)|$，往往需根据绝对值的意义，去掉绝对值的符号。观察上面的式子，联系它的几何意义，可以看出点$a=0$把数轴分为两段：$a>0$和$a<0$，a分别在两段内取值时，去掉绝对值的符号后，取不同的符号。因此，对于含有绝对值符号的解析式$|F(x)|$，要去掉它的绝对值符号时，可首先求出使$F(x)=0$的x值（即零点），然后在由零点划分的两个区间内，区别$F(x)$的正负，以确定去掉绝对值符号后应取的符号。简单地说就是："找出零点，划分区间，分段讨论。"这通常叫分段讨论法。在研究一些解析式时，若其中所含变量在不同区间取值而引起符号变化，从面得不同的结果时，也常采用这种方法。

例1．化简：$f(x)=|x-2|+|x+3|+|x-5|$。

解题思路：本题有三个含有绝对值符号的式子，首先分别求出每一个式子的零点，并在数轴上作出这些点，由小到大把数轴分为四段，然后逐段进行讨论。

解：分别令$x-2=0$　$x+3=0$　$x-5=0$，得$x=2$，$x=-3$，$x=5$。在数轴上作出这三个点。分段讨论如下：

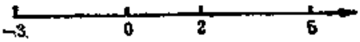

图 1

(1) 当 $x\leqslant-3$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=-(x-2)+[-(x+3)]+[-(x-5)]\\
&=-x+2-x-3-x+5\\
&=4-3x;
\end{aligned}
$$

(2) 当 $-3<x\leqslant2$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=-(x-2)+(x+3)+[-(x-5)]\\
&=10-x;
\end{aligned}
$$

(3) 当 $2<x\leqslant5$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=x-2+(x+3)+[-(x-5)]\\
&=6+x;
\end{aligned}
$$

(4) 当 $x>5$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=x-2+(x+3)+(x-5)\\
&=3x-4.
\end{aligned}
$$

例2. 解方程 $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

解: 分别求出绝对值符号内各个二项式的零点为: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

在区间 $(-\infty,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$, $(3,\infty)$ 上依次解给定方程:

(1) 当 $x\leqslant1$, 方程为:

$$1-x+2(x-2)-3(x-3)=4,$$

解得 $x=1$;

(2) 当 $1<x\leqslant2$, 方程为:

$$x-1+2(x-2)-3(x-3)=4,$$

解得 $4=4$, 即在区间 $(1,2]$ 内的任何 x 值都适合方程.此

时方程为恒等式；

（3）当 $2<x\leqslant 3$，方程为：

$$x-1-2(x-2)-3(x-3)=4,$$

解得$x=2$。在 $x>2$ 的前提下，求出 $x=2$，是矛盾的，故在本区间内方程无解；

（4）当 $x>3$，方程为：

$$x-1-2(x-2)+3(x-3)=4.$$

解得 $x=5$。

故原方程的解为：$1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $x=5$。

本题也可用图解法，即在上列各区间内依次作函数 $y=|x-1|-2|x-2|+3|x-4|$ 的图象，它们与直线$y=4$的各交点的横坐标，就是原方程的解。

解：对函数 $y=|x-1|-2|x-2|+3|x-4|$ 用分段讨论法去绝对值符号得：

$$y=\begin{cases}-2x+6 & (x\leqslant 1)\\ 4 & (1<x\leqslant 2)\\ -4x+12 & (2<2\leqslant 3)\\ 2x-6 & (x>3)\end{cases}$$

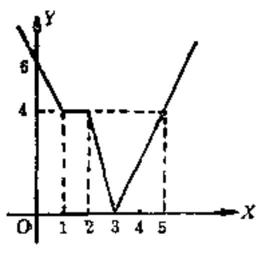

图 2

用描点法作出图象。

由图象可见当 $1\leqslant x\leqslant 2$和$x=5$时，都有$y=4$。

∴ 方程的解为：$1\leqslant x\leqslant 2$ 和 $x=5$。

例3。解方程组

$$\begin{cases}|x+1|+|y-1|=5, & (1)\\ |x+1|=4y-4. & (2)\end{cases}$$

解题思路：由(1)可见x和 y 不能同时分别为-1和1。若

直接用分段讨论法，应分 $x\geqslant -1$，$y>1$；$x\geqslant -1$，$y<1$；$x\leqslant -1$，$y>1$；$x\leqslant -1$，$y<1$；…… 各种情况分别解方程组，显然十分繁琐。进一步观察(2)，可见 $|x+1|=4(y-1)\geqslant 0$，故 $y\geqslant 1$。这样解法就可大为简化。

解：由(2)可见 $4y-4\geqslant 0$，$\therefore\ y-1\geqslant 0$。于是原方程组可化为

$$\begin{cases}|x+1|+y-1=5, & (3)\\ |x+1|-4y+4=0. & (4)\end{cases}$$

(3)−(4) 得 $y=2$，代入(2)得

$$|x+1|=4,$$

$\therefore\quad x_1=3,\ x_2=-5.$

$\therefore$ 原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-5,\\ y_2=2.\end{cases}$$

由本例可见解含绝对值的方程时，要仔细观察题目的特点，从中找出隐含的条件，以避免不必要的讨论。

例4。选择题：本题列出了代号为 A、B、C、D 的四种不同的答案，其中只有一个是正确的，将这个正确答案的代号，填入题后的括号内。*

下列图中的实线部分表示函数的图象，则函数：$y=1-|x-x^2|$的图象大致形状是（　　）。

解：令 $x-x^2=0$，得$x=0$ 或 $x=1$。

当$0<x<1$时，$x-x^2>0$；当 $x<0$或$x>1$时，$x-x^2<0$。

故去绝对值符号后，原函数为：

---

* 本书选择题的要求都与此相同，以后不另作说明。

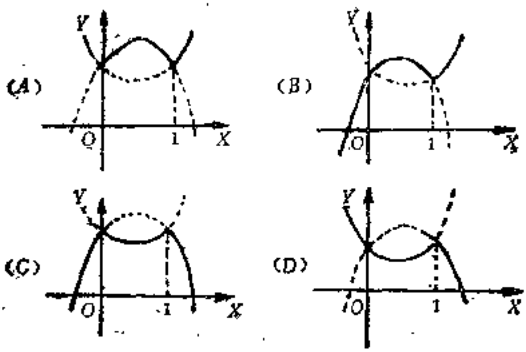

图 3

$$y=\begin{cases}1-x+x^2 & (0<x<1)\\ 1+x-x^2 & (x<0\text{ 或 }x>1)\end{cases}$$

它的图象应是两条抛物线上的一部分．在(0,1)内，开口向上；在$(-\infty,0)$或$(1,+\infty)$内开口向下．依此，分别观察以上四个图象，可知应取(C)．

由例2和例4，可见作出含绝对值的函数的图象，可以利用图象的直观，观察出结果，简化分段讨论的过程．

例5． 当a取何值时，关于x的不等式$x^2+x-a<|3x+2|$仅有正解？仅有负解？解集由两个不相交的区间组成？

解题思路： 原不等式左边是一个含参数的二次函数，不便讨论，故把原不等式改写为$x^2+x-|3x+2|<a$，令$y_1=x^2+x-|3x+2|$，它的图象可以作出，$y_2=a$则表示一组平行于x轴的直线，就可以从图象上观察出结果．

解： 原不等式改写为：$x^2+x-|3x+2|<a$．

令　$y_1=x^2+x-|3x+2|$，$y_2=a$，则

$$y_1=x^2+x-|3x+2|=\begin{cases}x^2-2x-2\left(x\geqslant-\dfrac{2}{3}\right)\\ x^2+4x+2\left(x\leqslant-\dfrac{2}{3}\right)\end{cases}$$

作出它的图象(如图4)。

$y_2=a$表示一组平行于x轴的直线(图中用粗虚线表示)。

从图中可以看出：

(1) 当$-3<a<-2$时，原不等式仅有正解；

(2) 不可能仅有负解；

(3) 当$-2<a<-\dfrac{2}{9}$时，解集由两个不相交的区间组成。

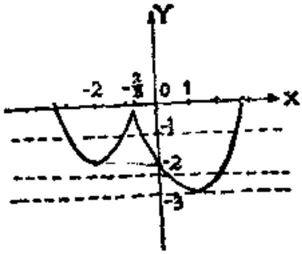

图 4

解含有若干因式的积或商的不等式时，也可分段讨论各个因式的符号，从而求出不等式的解，为了使过程简明，一般采用列表的形式进行。

例6. 解不等式$\dfrac{2x^2-3x+1}{(3x-1)(x-2)}>0$。

解：原不等式即$\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}>0$。

求出各因式的零点划分区间，将分段讨论结果列于下表(见下页)：

从下表可知不等式的解是：$x<\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}<x<1,x>2$。

对于算术根$\sqrt{a}$，要掌握两个非负性：

①$a\geqslant0$，②$\sqrt{a}\geqslant0$。

区间 符号 因式	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$3x-1$	−	+	+	+	+
$2x-1$	−	−	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
$\frac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}$	+	−	+	−	+

因此有$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a(a\geqslant 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$，即$\sqrt{a^2}=|a|$.这样有关根式的一些问题也可以用分段讨论法解决.

例7. 解方程$\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{4x^2-4x+1}=10$.

解：原方程可化为

$$\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(2x-1)^2}=0,$$

即　$|x-4|+|2x-1|=0$.

用分段讨论法解之：

(1) 当 $x\leqslant\frac{1}{2}$时，方程为 $4-x+1-2x=10$,

$\therefore\ x=-\frac{5}{3}$;

(2) 当$\frac{1}{2}<x\leqslant 4$时，方程为 $4-x+2x-1=10$,

$\therefore\ x=7$.

但 $x=7$ 不在给定的区间内，所以它不是方程的解；

（3）当$x>4$时，方程为 $x-4+2x-1=10$，

$\therefore\quad x=5$。

$\therefore$ 方程的解为$x=5$或$x=-\dfrac{5}{3}$。

对于含二次根式的三角函数式的化简，也应注意算术根的概念，必要时也可用分段讨论法进行，但需根据题中给定的角所在区间和三角函数的有关性质，决定如何分段讨论。

例8. 选择题：θ 是第二象限内的角，化简$\sqrt{1-\sin\theta}$后，结果是（　　）。

（A）$\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}$；

（B）$\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}$；$\left(\dfrac{\theta}{2}\text{在第三象限内}\right)$

$\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}$；$\left(\dfrac{\theta}{2}\text{在第一象限内}\right)$

（C）$\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}$；

（D）以上都不对。

解：
$$\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=\sqrt{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$
$$=\left|\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

$\because\quad\theta$是第二象限内的角，即

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi,\ (n\in Z)$$

$\therefore\ n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$,

也就是 $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$, (1)

或 $2k\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$。 (2)

1°当$\frac{\theta}{2}$取(1)内的值时，$\cos\frac{\theta}{2}<\sin\frac{\theta}{2}$,

$\therefore$ 原式$=\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}$;

2°当$\frac{\theta}{2}$取(2)内的值时，$\cos\frac{\theta}{2}>\sin\frac{\theta}{2}$,

$\therefore$ 原式$=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$。

故应取(B)。

解析几何是用代数方法来研究几何问题，所以代数的解题方法常用于解几中，例如形如 $Ax^2+Cy^2=K$ 的二次曲线的类型，取决于 A、C、K 的符号，故 A、C、K 若为含某一参数的式子时，应讨论它们的符号，从而决定曲线的类型，这就用得上分段讨论法.

例9. 方程 $x^2\sin\alpha+y^2\cos\alpha=1, \alpha\in(0,\pi)$, 随着$\alpha$取不同区间的值，所表示的曲线分别是(　　)。

(A) 椭圆或双曲线;

(B) 双曲线或抛物线;

(C) 圆、椭圆或双曲线;

（D）椭圆、圆、两条直线或双曲线。

解题思路： 在区间 $(0,\pi)$ 内，$\sin\alpha>0$，而 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\cos\alpha=0$。又在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$和$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$内，$\cos\alpha$ 的符号有正有负，所以要分段讨论。

解：（1）当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，原方程可化为：

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\sin\alpha}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1.$$

$\because$ $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，$\therefore$ 方程表示椭圆。特殊的，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，方程表示一个圆：

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2}}=1,$$

（2）当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，原方程为 $x^2=1$即 $x=\pm 1$，表示两条平行于 y 轴的直线。

（3）当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$\sin\alpha>0$而 $\cos\alpha<0$，原方程表示双曲线，故取（D）。

练 习 一

一、选择题：

1. 方程 $|x-4|+|x+1|=5(x\in R)$ 的解是（　　）。

（A）-1；　　（B）4；

（C）-1 或 4；（D）$-1\leqslant x\leqslant 4$。

2. 函数 $y=|4x-x^2-3|$ 的图象的大致形状是(　　)。

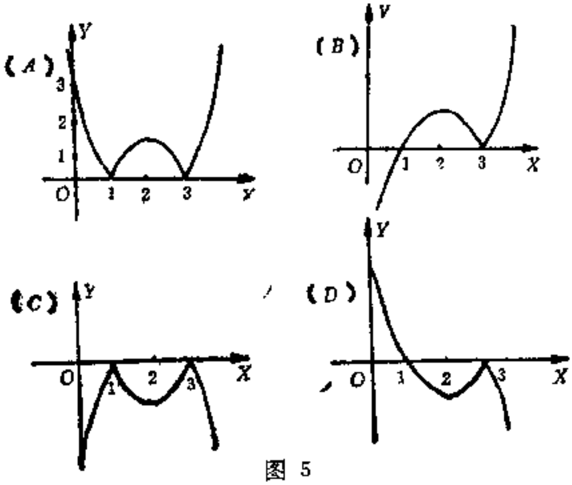

图 5

二、分别用解析法和图解法解方程：$x^2-|x|=6$。

三、作函数 $y=|\log_3 x|$ 的图象。

四、解不等式 $|x^2-10x+21|\leqslant\dfrac{x}{2}$。

五、求函数 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{x-5}{x^2-2x-3}}$ 的定义域。

六、化简：$\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$。

七、试就 k 值讨论方程：

$$\frac{x^2}{4-k}+(k-2)y^2=k+1.$$