高等农业院校交流講义

高等数学

北京农业机械化学院编

农业机械化专业用

农业出版社

高等农业院校交流講义

高 等 数 学

北京农业机械化学院編

农 业 出 版 社

高等农业院校交流讲义

高　等　数　学

北京农业机械化学院编

农　业　出　版　社　出　版

北京老钱局一号

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 106 号)

新华书店科技发行所发行　　各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷装订

统一书号 13144.95

1961年8月北京制型	开本 787×1092 毫米 三十二分之一
1961年9月初版	字数 118千字
1961年9月北京第一次印刷	印张 四又八分之七
印数 1—7,100 册	定价 (7) 四角一分

前　言

本书共分六章：近似数、計算尺、諾模図、概率与誤差、經驗公式与綫性規划。

本书是农业机械化专业用的数学講义。根据我們几年的教学經驗，講課时数約为四十小时(不包括习題課)。这六章的时数的分配是：近似数 4 小时；計算尺 6 小时；諾模图 8 小时；概率与誤差 10 小时；經驗公式 4 小时；綫性規划 6 小时。余 2 小时作为机动。

目前还沒有一本适合农业机械化专业用的数学教本，我們数研組承担了这項編写任务。在編写过程中，我們力求結合专业，但由于时間仓促，业务水平有限，书中缺点是不可避免的。希望各采用单位与讀者随时批評指正。

北京农业机械化学院数学教研組

1961 年 5 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

第一章 近似数

选定单位量，对一量进行量度，理論上存在表示該量多寡的准确数。但由于量度工具不可能完全准确，以及工作者的經驗、視力与其他因素的影响，也使量度結果不可能完全准确。因此，被量度的量的多寡，只可能用一近似数来表示，这一数称准确数的近似数，簡称近似数。例如 π 是半圓周角的准确表示数，3.14，3.142，3.1416 等都是 π 的近似数。

在利用自然为我們的事业服务的过程中与近似数打交道是不可避免的。事实表明，由于对近似数的知識缺乏了解，工作中許多时間浪費在徒劳无功的計算上。例如两个小数位不同的近似数相加，保留很多的位数，并不一定精确些。又例如求数 46548.396815 的平方根，如果只要求达到 0.01 的准确度，取 46548 开方就可以了。由此可見研究近似数的运算間題，是一項极其重要的工作。近似算的范圍很广，本章仅介紹一些基本概念，如何确定計算結果的准确程度，以及如何进行近似数的四則运算及开平方。

在以下討論中，我們将准确数用 A，B，C，…来表达；近似数用 a，b，c，…来表达。a 是 A 的近似数記为 $A \approx a$。

§1.1 基本概念

1. 誤差　用米达尺量一书本的长，要求量到 0.1cm（米达尺的小刻度是 0.1cm，即 1mm）。这样若有不足 0.1cm 的长度，只能用目力估計。經驗說明，正常眼力估計不会有超过最小刻度一半的

出入。設量度的結果是20.24cm，其中20.2是量出的，而0.04是目力估計的，故若取20.2cm为书长，它与书的准确长不会有超过0.05cm 的出入。

設书长为 l (cm 省写)即有:

$20.2-0.05<l<20.2+0.05$ 即:

$$|l-20.2|<0.05,$$

0.05 称近似数 20.2 的最大絕对誤差，簡称誤差。

定义 設 A 的近似数为 a，Δ 为一尽可能小的正数，如 $|A-a|<\Delta$ 则称 Δ 为近似数 a 的誤差。

誤差显然是名数。

对Δ我們提出两点要求：1° 是尽可能小的正数；2° 最多含有两个非 0 数碼。

例 1. 取 3.14159 作 π 的近似数，则

$$|\pi-3.14159|<0.0000027$$

可取 $\Delta=0.0000027$ 或 0.000003

例 2. 取 2.718 作 e 的近似数，则

$$|e-2.718|<0.00029,$$

可取 $\Delta=0.0003$

我們常用的三角函数表、对数表等，上面列的数值都是近似的，它們的誤差都是末位数的单位的一半，例如：

$\lg 3$ 的查表值 0.47712，$\Delta=0.000005$

$\sin 18^\circ$ 的查表值 0.3090，$\Delta=0.00005$

2. 相对誤差 測量北京到广州的铁路长时，得$\Delta=1$公里，工作質量就已經很好；測量街道的寬时，得 $\Delta=1$ 米，工作質量就非常低劣，由此可見单是 Δ 并不能完全反映工作的質量，还必須考虑到測量对象本身的大小。这就要談到相对誤差。

定义 A 以 a 为近似数，誤差为Δ，比值$\dfrac{\Delta}{|a|}$叫做 a 的相对

误差，相对误差記为 δ 即

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}。$$

依定义，相对誤差是不名数。

例：量木头，长 10 米，$\Delta = 0.1$ 米，量一段公路，长 10 公里，$\Delta =$ 10 米，問那一项工作质量高。

$$依相对誤差定义\ \delta_1 = \frac{0.1}{10} = 0.01 = 1\%$$

$$\delta_2 = \frac{10}{10 \times 1000} = 0.001 = 0.1\%$$

可見后一項的工作质量高。

［注］通常把相对誤差乘 100 或 1000 变为百分誤差或千分誤差

即 $100\dfrac{\Delta}{|a|}\%$；$1000\dfrac{\Delta}{|a|}‰$，

3. 有效数字　量书长 $l \approx 20.2$，$\Delta = 0.05 = 0.1 \times \frac{1}{2}$，

我們把 20.2 叫做有效数字，

又如一近似数 $a \approx 0.023$，$\Delta = 0.0005 = 0.001 \times \frac{1}{2}$ 我們把 2.3 叫做有效数字，2 前的 0 不叫有效数字。經过精确計算一本书的字数为 511,000 个，最多有 5 个字的出入，即书的字数为

$$a \approx 511{,}000,\ \Delta = 10 \times \frac{1}{2},$$

5、1、1、0、0，都叫有效数字，而最后一个 0 不叫有效数字。綜上所述，得：

定义　**一数 a 的誤差 Δ 不超过 a 的数碼 z 所在位上的半个单位，则 a 从左起第一个非 0 数碼起到 z 止，所有的数碼都是有效数字。**

具有 n 位有效数字的近似数 a，称为准到 n 位有效数字。例

$0.00263, \Delta = 0.00001 \times \frac{1}{2}$，有效数字是 2、6、3；

$3809, \Delta = 1 \times \frac{1}{2}$，有效数字是 3、8、0、9。

真空中光速每秒是 299,796 公里，最多有 4 公里的出入，故近似数 299796 的有效数字是 2、9、9、7、9。如以 300,000 作光速的近似数，則左起的 3、0、0 是有效数字，末尾的三个 0，就不是有效数字了。为了区别作为有效数字的 0 与非有效数字的 0，将 300,000 記为 300×10^3。又如近似数 3.5 尺与 3.50 尺这两个量也是有区别的，3.5 尺表示某长度在量的时候准确到十分之一尺，在寸以下的刻度我們就不清楚了，事实上这个量可能是 3.51 尺也可能是 3.49 尺而我們把它記为 3.5 尺；而 3.50 尺表示某长度在量的时候准确到百分之一尺的地步，在分以下的刻度是不清楚的。我們說 2.5 是有两个有效数字而 2.50 是三个有效数字。但 0.02 尺是一个有效数字的数。

4. 抹尾規則 为了节省时間和免除徒劳的工作，在計算时，我們經常要截去数的过长的尾数，而保留适当部分。我們知道 $\pi = 3.1415926535\cdots\cdots$，但在运用 π 时，我們只須按問題的需要，取近似数 3.14，3.142，3.1416，……就可以了。这种去尾的方法，就是大家熟知的“四舍五入”規則，現将較这个規則加以改进了的抹尾規則介紹如下：

要把一个数抹尾湊整到 n 位有效数值时，先把第 n 位右边所有的数碼都抹去，如被抹部分小于第 n 位的半个单位，則第 n 位保持不变；如被抹部分大于第 n 位的半个单位，則第 n 位数碼加上 1；如被抹部分等于第 n 位的半个单位，則当第 n 位的数碼为偶数时保持不变，为奇数时加 1。

經过抹尾湊到 n 位有效数字的数，显然准到 n 位有效数字。

下面将左边的数抹尾凑正到四位有效数字列在右边

29.64345	29.64
72.91812	72.92
6.399502	6.400
77.68499	77.68
48.365	48.36
17.495	17.50
299796	2998×10^2

我們常用的数值表(如三角函数表，对数表……)上的数，都是准到最后一位数碼的，如无特別声明，就应該認为近似数最后一位数碼是有效的。

近似数 7.42 (±0.006) 中的 2，不是有效数字，但因 7.42 的誤差 $\Delta<0.01$ 即 2 所在位上的一个单位，这时我們說 7.42 的所有数碼都是可靠的。例如

22.585 (±0.0007) 有五个可靠数碼。

0.0785 (±0.01) 仅有一个可靠数碼。

定义 **一数 a 的誤差 Δ 不超过 a 的数碼 z 所在位上的一个单位，則 a 的左起第一个非 0 数碼起到 z 止，所有的数碼都是可靠的。Δ 如超过 z 所在位上的一个单位，則 z 及 z 后的所有数碼都是不可靠的。**

显然有效数字都是可靠的，可靠数字不一定是有效的。7.42 (±0.006)的 2 是可靠数字，但不是有效数字。

§1.2 誤差的一般公式

設 $N=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表 n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，当自变数有增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_n$ 时，函数相应的增量:

$$\Delta N=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

由于 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_n$ 都很小，故增量可用全微分代替即：

$$\Delta N \approx dN = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

如果把 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ 看作自变量的誤差，則由它們所引起的函数的誤差 Δ，可由下式決定：

$$\Delta = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \qquad (*)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{|N|} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\frac{\Delta x_1}{|N|} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\frac{\Delta x_2}{|N|} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\frac{\Delta x_n}{|N|} \qquad (**)$$

由(*)及(**)計算 Δ 及 δ，与要求 Δ 及 δ 是尽可能小的数显有矛盾，但过分細致，这里不加討論。(*)及(**)我們称之为誤差的一般公式。

由一般公式即可得到下面的推論：

推論 1，設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 順次是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的近似数，它們的誤差順次是 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$，若用 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 作 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的近似数，則其誤差 $\Delta = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n$。

証：

$$N = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| = \cdots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| = 1,$$ 推論由(*)即明。

这說明 n 个近似值和的誤差等于各个誤差的和

推論 2. 設 x_1, x_2 順次是 X_1, X_2 的近似数，它們的相对誤差順次是 δ_1, δ_2，若用 $x_1 x_2$ 作 X_1, X_2 的近似数，則其相对誤差 $\delta = \delta_1 + \delta_2$。

証：

$$N = f(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial N}{\partial x_2} = x_1,$$ 代入(**)得：

$$\delta = \frac{\Delta x}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} = \delta_1 + \delta_2$$

故推論即明。

本推論在 n 个近似数相乘时也成立，即：近似数乘积的相对誤差等于各乘数相对誤差的和。

推論 3. 設 x_1, x_2 順次是 X_1, X_2 的近似数，它們的相对誤差順次是 δ_1, δ_2, 若用 $\frac{x_1}{x_2}$ 作 $\frac{X_1}{X_2}$ 的近似数，則其相对誤差 $\delta = \delta_1 + \delta_2$

这說明商的相对誤差等于除数与被除数相对誤差的和。

推論 4. 設 x_1 是 X_1 的近似数，它的相对誤差是 δ_1, 若用 $\sqrt{x_1}$ 作 $\sqrt{X_1}$ 的近似数，則其相对誤差

$$\delta = \frac{1}{2}\delta_1$$

推論 3、4 請同学自証。

§1.3 近似数的四則运算与开方

对近似数进行的四則运算，举例說明于下（只介紹法則）。

1. 加法

例 1. 求近似数 124.3; 15.73; 0.457 的和，

【解】 我們把諸数列成直式，其中*是数字不明的

$$\begin{array}{r} 124.3** \\ 15.73* \\ 0.457 \\ \hline 140.487 \end{array}$$

从算式上看数尾的 87 根本是沒有意义的；另一方面根据推論 1, $\Delta = 0.05 + 0.005 + 0.0005 = 0.0555$, 可見在和数中 8, 7 都不可靠，故保留 140.40 較为恰当。这样我們可以先将各数抹尾凑

整,然后相加。演算式如下

$$\begin{array}{r|l} 124.3 & \\ 15.7 & 3 \\ 0.4 & 6 \\ \hline 140.5 & \uparrow\text{——备用位} \end{array}$$

∴ $124.3+15.73+0.457\approx 140.5$。虚线右边部分,仅备进位用,不必写出。

例 2. 近似数 561.32; 491.6; 86.954; 3.9462 的和

[解] 仿例 1,列演算式如下:

$$\begin{array}{r|l} 561.3 & 2 \\ 491.6 & \\ 86.9 & 5 \\ 3.9 & 5 \\ \hline 1143.8 & \uparrow\text{——备用位} \end{array}$$

∴ $561.32+491.6+86.954+3.9462\approx 1143.8$。

法则:做近似数加法时,各近似数的抹尾法是:要使得它们在小数点后的数字个数,比小数点后数字个数最少的那一个近似数还多一位数。

最后,在和数中,最末一位数字不必保留。最末一位数字前面的数字,在一般情况下都是可靠的。

2. 减法

例 1. 近似数 1541.23 与 20.1143 之差

[解] 仿加法演算如下

$$\begin{array}{r|l} 1541.23 & \\ 20.11 & 4 \\ \hline 1521.12 & \uparrow\text{——备用位} \end{array}$$

$\therefore\quad 1541.23 - 20.114 \approx 1521.12$。

由此可见，减法法则与加法相同。但下列明显事实应当注意，两个相接近的数相减，有效数字会大量丧失。

例 2. 12.147；12.146都具有五位有效数字，但它們的差 0.001 却只有一位有效数字了。故这种情况在近似計算中最宜避免。相接近的数相减，如不可避免，則只好增加原数后的有效数字位数。或改变算式。

例 3. $\sqrt{10} = 3.1623$，$\pi = 3.1416$

$\sqrt{10} - \pi \approx 0.021$，有效数字大量丧失

如取

$$\sqrt{10} = 3.162278,\ \pi = 3.141593$$

則

$$\sqrt{10} - \pi \approx 0.02068$$

又如改变算式

$$\sqrt{10} - \pi = \frac{10 - \pi^2}{\sqrt{10} + \pi} = \frac{10 - 9.86965}{3.1623 + 3.1416}$$

$$= \frac{0.13035}{6.3039} \approx 0.02068$$

（注：本例除法运算可参看本节之 4）

3. 近似数的乘法

由上节的推論 2)得乘法誤差規則：設 X_1 的近似数是 x_1，其相对誤差是 δ_1，X_2 的近似数是 x_2，其相对誤差是 δ_2；若用 $x_1 \cdot x_2$ 作 $X_1 \cdot X_2$ 的近似数，其相对誤差 $\delta = \delta_1 + \delta_2$，又由相对誤差与誤差的关系可見 $\Delta = x_2\Delta_1 + x_1\Delta_2$，

例 1. 一立方厘米的銅重 8.92 克($\Delta_1 = 0.005$)八立方厘米的銅重多少克？($\Delta_2 = 0$)

$$8.92 \times 8 = 71.36$$

根据上面規則 $\Delta = 8 \times 0.005 + 8.92 \times 0 = 0.04$，可見数字 6 已不可靠，故結果应取 71.4。

例 2. 一块矩形試驗田长 43.7 米，寬 8.4 米，求它的面积。

	43.7*
	8.4*
	****
1	748
34	96
36	7.08

这个例子从形式上卽可見 7 已不可靠，故結果只应取 37.×10′。事实上根据上面規則 $\Delta = 34.7 \times 0.05 + 8.4 \times 0.05 = 2.155$

由上面两个例子，我們可以总結出下面的規則：

在近似数和乘时，有效数字最少的因数有几位有效数字，乘积中就只应当保留几位有效数字。

例 3. 求 349.1 与 0.8634 的积。

下面两个算草中，左式 4 后的 1 已不可靠，故只須取 301.4，这就表明有一半演算是徒劳无功的，同样的結果可以从右式的得到，右边这种乘法叫做省略乘法。

		3491*
		8634*
	*	****
1	3	964
10	4	73
209	4	6
2792	8	
3014	1	294
	↑—备用	

3491	
4368	←—乘数各位反向写
27928	←—3 × 3491
2094	←—6 × 349
103	←—3 × 34
12	←—4 × 3
3014	↑—备用

做省略乘法时要注意，乘数反向写后首位与被乘数首位对齐，乘数各位数字只須从它正頂上的数开始，在乘右边部分按抹尾規則省略。各次乘积右面看齐：

4. 近似数的除法

由上节推論 3)得除法誤差規則：設 X_1 的近似数是 x_1，其相对誤差是 δ_1，X_2 的近似数是 x_2 其相对誤差是 δ_2。若用 $\frac{x_1}{x_2}$ 作 $\frac{X_1}{X_2}$ 的近似数，其相对誤差

$$\delta = \delta_1 + \delta_2。$$

由相对誤差与誤差的关系可見

$$\Delta = \frac{x_2\Delta_1 + x_1\Delta_2}{x_2^2}。$$

例 1. $48430 \div 9.4 = 5152.121\cdots\cdots$

由上面規則

$$\Delta \approx 2426.2/88 \approx 27.6 \approx 28$$

可見 1 右边的 5 已不可靠，故結果只須取 52×10^2。

例 2. 已知电阻 $R = 48.6$ 欧姆，电压 $v = 220$ 伏特，求电流 $I = \frac{V}{R}$

```
220 | ****        | 48.6*
194 | 4***        |------
-----------       | 4.526
 25 | 6 **
 24 | 30**
-----------
  1 | 30**
    | 972*
-----------
    | 328**
    | 2916*
-----------
    |  364
```

由算式可見 328 全不可靠，故商式 2 右边的 6 不可靠，故結果只須取 4.53。

由上面两个例子，我們可以总結出下面規則：在近似数相除

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com