最佳策略

ZHONG XUE SHUXUE JINGSAI FUDAO CONG SHU

● 熊　斌编著

中·学·数·学·竞·赛·辅·导·丛·书

ZUI JIA CELUE

XIONG BIN BIANZHU

SHANGHAI KEJI
JIAOYU CHUBANSHE
上海科技教育出版社

中学数学竞赛辅导丛书

最 佳 策 略

熊 斌 编著

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

中学数学竞赛辅导丛书
最佳策略
熊 斌 编著
上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路393号)
各地新华书店经销 宜兴印刷二厂
开本787×1092 1/32 印张3.75 字数84000
1993年2月第1版 1993年2月第1次印刷
印数1-2900
ISBN 7-5428-0686-6
G·567
定价:2.65元

引　　言

为了帮助读者更好地理解本书所阐述的数学思想与数学原理，我们有必要先介绍一些与“最佳策略”有关的数学知识.

1944年，天才的美籍匈牙利数学家冯·诺依曼(John von Neumann, 1903～1957)和他的合作伙伴摩根斯顿(Oskar Morgenstern, 1902～1977)发表了经典著作《对策论与经济行为》，标志着一门新的数学分支学科——对策论正式诞生。尽管在此以前20年，著名的法国数学家波莱尔(Emile Borel, 1871～1956)就已对对策论的一些问题进行过研究，但它引起人们普遍注意并成为一门有着旺盛生命力的学科，却是始于冯·诺依曼将它置身于竞争中经济行为的研究之后.

对策论又称“博弈论”，它运用数学理论和方法来研究有利害冲突的双方在竞争性的活动中是否存在自己战胜对方的最优策略，以及如何找出这些策略等问题. 例如，在战斗中可以考虑这样一些情况：甲方用一定数量的飞机向乙方投弹，可能有几条进攻的路线；乙方备若干高射炮，可以布置在甲方可能进攻的线路上. 甲方为了使进攻获得最大的成功，就要考虑是集中一路进攻还是分兵几路进攻. 而乙方也须依据甲方可能进攻的方式来安排自己的炮火. 在这类问题中，将双方的损耗用数量来描述，并寻求最佳策略的问题，便是对策论的研究内容.

对策论有一些基本术语，如局、局中人、策略等. 一场竞

争按竞争规则从开始到结束称为“局”．参加竞争的个体称为“局中人”，局中人可以是某个人，也可以是某个联合体、某个公司、某个团体、某个国家……．若一局对策中有n个局中人，则称此局为“n人对策”．在一局对策中，每个局中人可能有许多供选用的方案来指挥他的动作，局中人据以选取他的方案的规则称之为一个“策略”．若一种规则可以决定局中人选取何种方案，而不是决定局中人以多大的概率来选取何种方案，则这种规则称为“纯策略”，而将按某种概率来选取方案的规则称为“混合策略”．如果在一局对策中，每个局中人都只有有限个策略，则称此对策为“有限对策”，反之则称为“无限对策”．局中人对局终了时的各人的得失称为“支付”或“得失”．若一局对策中所有局中人所得支付（得为正，失为负）的代数和为零，则称此对策为“零和对策”．对策还有“合作对策”与“不合作对策”之分，后者指局中人之间不许事先互通信息，不许结盟，不许搞联合对策等，而前者则不受此限制．

随着对策论被广泛应用于处理经济问题，例如竞争平衡性问题、经济增长问题、资本积累问题等，以及心理学（交易与协商的作用和性质）、政治学（各政治力量的联合作用）的研究，寻求最优策略使得越来越多的人产生了兴趣．

本书试图从数学竞赛培训的角度，对有关最优策略的问题作最浅近的介绍．每章之末都附有练习题，读者通过这些练习，可以加深理解书中讲述的方法和内容．

目　　录

第一章 两人对策

一提到两人对策，大家马上会想到下棋、打扑克等一些两人进行的游戏(或对弈、竞赛)．在这类对策中，双方总是希望战胜对手，以获得尽可能好的结果．因此，双方都很关心对方所采取的策略，力争知己知彼，然后采取扬长避短，克敌制胜的策略．那么如何在遵照规则的前提下，选定一个最佳策略来取得对策的胜利呢？这就是本章所要讨论的．

§1.1 几个例子

这一节通过几个具体的例子来讨论在两人对策中，如何选取一个最佳策略．

例1 甲、乙两人轮流在黑板上写下不超过10的自然数．规则是禁止写黑板上已写过的数的约数．不能完成下一步的为失败者．问：是先写者还是后写者必胜？如何取胜？

分析 若甲要获胜，那么当甲写了某一数后，乙无法再写．于是，乙写最后第二个数，甲写最后第三个数，如此等等．也就是说，甲要获胜，必须每次这样，他写了一个数后，剩下的可供乙选择的数是偶数个．

解 先写者甲存在获胜的策略．例如他第一步写数6，那么乙仅可写数4，5，7，8，9，10中的一个．把它们分成数对(4，5)，(8，10)，(7，9)．如果乙写数对中的某个数，甲就写数对中的另一个数，那么甲就必定能获得胜利．

到此，这个问题已经解决．如果我们把此题中的数10改

成 1000，或者更一般地，对一切自然数 n，是先写者还是后写者有获胜的策略呢？我们说，对一切自然数 n，先写者甲一定有必胜的策略．若不然，对甲的每个方案乙都有获胜的策略，那么甲第一步可写数 1，这样一来后写者乙实际上就变成了先写者．这时，甲只要按照乙原先对付他的策略，那么他就一定能获胜．

例 2 今有围棋子 1400 颗，甲、乙两人做取围棋子的游戏，甲先取，乙后取．两人轮流各取一次，规定每次只能取 $7p$ 颗棋子（p 为 1 或不超过 20 的任一质数），谁最后取完谁为胜．问：甲乙两人谁有必胜的策略？

分析 因为 $1400=7\times200$，所以原题可以转化为：有围棋子 200 颗，甲、乙两人轮流每次取 p 颗（p 为 1 或不超过 20 的任一质数），谁最后取完谁为胜．

解 乙有必胜的策略．

由于 $200=4\times50$，p 或者是 2 或者可以表示为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式（k 为 0 或正整数）．乙采取的获胜策略为：若甲取 1、2、3、$4k+1$ 或 $4k+3$，则乙取 3、2、1、3、1，使得余下的棋子颗数仍是 4 的倍数．于是，经过若干次后，就会出现剩下数为不超过 20 的 4 的倍数．此时甲总不能取完，而乙可全部取完而得胜．

此题中，乙是“后发制人”，所以先取者不一定存在必胜的策略，关键是看他们所面临的“情形”．

我们可以这样来分析这个问题的解法，将所有的情形——剩余棋子的颗数分成两类，第一类是 4 的倍数，第二类是其他．若某人在取棋子时遇到的是第二类情形，那么他可以取 1 或 2 或 3 使得剩下的仍是第一类．若取棋时面临第一类情形，则取棋后留给另一个人的一定是第二类情形．所以，谁

先面临第二类情形谁就获胜．在绝大部分两人对策问题中，都可以采用这种方法．

例 3　在 8×8 格的象棋盘的右下格放一枚棋子（如图 1），每步只能向左或者向上或者向左上对角线走一格，甲乙两人交替走，以先到左上格为胜者，问谁必胜？怎样取胜？

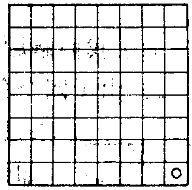

图 1

解　先走者甲有必胜的策略．

我们对 64 个格子按行列标上数对．将左上格编号为(1, 1)，右下格编号为(8, 8)．每一个格子都由一个数对 (i, j) $(1\leqslant i, j\leqslant 8)$ 表示，其中 i 表示格子所在的行，j 表示列．将所有的格子分成两类：第一类是数对中的两数均为奇数的格子，第二类是其余的格子．这样的分类满足：(1) 若棋子在第一类格子，则无论采用何种上述走法，必定走到第二类格子；(2) 若棋子在第二类格子时，总可以有一种走法走到第一类格子中去．由于左上格(1, 1)是第一类格子，右下格(8, 8)是第二类格子，甲只要每一步从第二类格子(如(8, 8))走到第一类格子(如(7, 7))，而乙无论怎样走，只能走到第二类．因此，经过有限步后，甲必定走入(1, 1)格．

此题的方法，对于 $m\times n$ 的棋盘也同样适用．当 m、n 不都是奇数时，先走者甲必胜，当 m、n 都是奇数时，后走者乙必胜，但他们需按照获胜的策略走．

例 4　有一个 3×3 的棋盘方格以及 9 张大小为一个方格的卡片，在每一张卡片上任意写上一数，甲、乙两人做游戏，轮流选取一张卡片放到 9 格中的一格，对甲计算上、下两行六个数字的和；对乙计算左、右两列六个数字的和．和数大者为胜．试证明：不论卡片上写着怎样的数，若甲先走总可以有一

种策略使得乙不可能获胜.

分析　1. 我们遇到的是9个任意的数,因此按大小顺序设为

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_8\leqslant a_9$$

将有助于我们解题.

2. 由于四个角上的数是两人共有的,因而计算和数的结果只与放在A、B、C、D这四格中的数字有关(如图2).

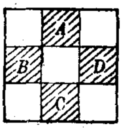

图　2

3. 甲要取胜,必须采取(1)尽可能地将大的数字填入A格或C格,(2)尽可能地将小的数字填入B格或D格. 由于乙同样会采取这两种方案之一,因此,甲采用何种策略,还得与这9个具体数字有关.

证明　有三种情形:

(1) 当$a_1+a_9>a_2+a_8$时,甲必胜. 甲的策略是:先选a_9放入A格中,第二次尽可能选小的数放入B格或D格,则A与C格中的数字之和不小于a_1+a_9,而B与D格的数字之和不大于a_2+a_8,故甲胜.

(2) 当$a_1+a_9<a_2+a_8$时,甲也必胜. 甲先取a_1放入B格,第二次甲选a_8或a_9放到A格或C格中,这样,A与C格的数字之和不小于a_2+a_8,而B与D格的数字之和不大于a_1+a_9,故甲胜.

(3) 当$a_1+a_9=a_2+a_8$时,甲取胜或和局. 甲可采用上述策略中的任一种

例5　8个小圆分别涂了4种颜色:2个红的;2个蓝的;2个白的;2个黑的. 甲乙两人轮流把圆放到立方体的顶点上. 在所有的圆都放到立方体的各个顶点上去后,如果对立方体

的每一个顶点都能找到一条过此顶点的棱，其两个端点上的圆有相同的颜色，则第一个放圆的人甲获胜，否则第二个人乙获胜．试问在这个游戏中谁将获胜？

解 乙将获胜．

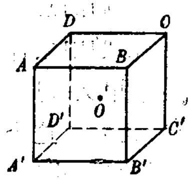

图 3

如图 3 所示，立方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 是一个关于它的中心 O 对称的图形．若甲在 A 点放上红色的圆，则乙就在与 A 关于中心 O 对称的点 C' 也放上红色的圆，依次类推．于是，当 8 个球全部放到立方体顶点上后，没有一条棱其两个端点上的圆有相同的颜色，所以，后放圆的人乙获胜．

例 6 小王和他的父母都是象棋爱好者，母亲实力较弱，而父亲的棋艺很高．一天，父亲为了考察一下小王的数学水平，提出进行一次比赛．比赛的规则是父亲与母亲轮流和他下，共赛三局，他要连胜两局才算赢．比赛时究竟采用父-母-父，还是母-父-母的顺序进行，则由小王决定．请问小王应当选择哪一种顺序，才能有较大的机会获胜？

解 设小王赢父亲的概率为 p_1，赢母亲的概率为 p_2，则他输给父母的概率分别为 $1-p_1$，$1-p_2$．如果他以父-母-父的顺序和父母比赛，连胜两局的情况有三种：

(1) 连胜三局，其概率为 $p_1\times p_2\times p_1=p_1^2p_2$；

(2) 连胜前两局，其概率为：

$$p_1\times p_2\times(1-p_1)=p_1p_2-p_1^2p_2;$$

(3) 连胜后两局，其概率为：

$$(1-p_1)\times p_2\times p_1=p_1p_2-p_1^2p_2.$$

于是他连胜两局的总概率为上述三个数相加，即

$$p_1^2p_2+p_1p_2-p_1^2p_2+p_1p_2-p_1^2p_2=p_1p_2(2-p_1).$$

同理，如果小王以母-父-母的顺序和父母比赛，那么，他连胜两局的总概率是 $p_1p_2(2-p_2)$.

由题中条件知，$p_1<p_2$，故 $p_1p_2(2-p_1)>p_1p_2(2-p_2)$. 所以，采用父-母-父的顺序时，小王有较大的获胜机会.

说明　这个题目从直观上也好理解，若按母-父-母顺序进行比赛，小王只与父亲赛一次，这次一输，赢的可能性全没有了；若按父-母-父顺序进行比赛，小王与父亲要赛两次，只要有一次赢，他连赢两局的可能性就很大.

§1.2　堆物对策

很久以前，我国就流传着一种两人玩的堆物对策，规则很简单：有 k 堆物体(小棒或石子)，每堆物体的数目是任意的. 现有甲、乙两人轮流地取这些物体，每次只能在其中一堆中拿取，至少取一个，至多取一堆，谁最后取完谁获胜.

这个貌似简单的游戏，却蕴含着非常巧妙的数学原理. 当 $k=3$ 时，这个游戏最有意思. 北方称为"抓三堆"，南方叫做"拧法"，大约一百年前传入欧洲，取名"Nim". "Nim"可能就是"拧法"的音译，也叫做中国两人游戏(Chinese Game of Nim). 如果参加这个游戏的双方都完全不懂其中的"数学奥妙"的话，那么，胜负对他们来说，只能听天由命，凭运气罢了；但如果其中有一人不懂而另一个人懂得其中的原理，那么，胜利常常属于后者；如果两个参加者都了解其中的奥妙，胜负就取决于初始状态，即由有多少堆物体及每堆物体的数目所决定. 下面我们来分析这类游戏的巧妙之处. 先从一个简单例子开始.

例1　甲、乙两人轮流依次报数，从1报起，报数的个数至多是10，但不能不报. 前一个人报到某数，后一个人就从

下一个数接着报下去，谁先报到 100 谁就获胜．问：甲、乙两人谁能获胜？应采取何种报数策略才能获胜？

解 我们来分析一下，甲要取胜，他应该采取什么样的策略．

甲为了要报到 100，他前一次必须报到 89．这是因为甲报到 89 以后，乙只可能报到 90，91，…99 这 10 个数之一，不论乙报到哪一个数，甲都可以接下去一直报到 100．

同样理由，甲为了报到 89，他前一次必须报到 78．依次类推，再前一次依次为 67，56，45，34，23，12，1．所以，甲为了最后的取胜，采取的正确策略是：第一次报 1，然后每次报的数的个数和乙报的数的个数和正好是 11，也就是说依次报到 12，23，34，45，56，67，78，89，那么，甲一定获胜．

我们可以把这个问题推广到一般化．

甲、乙两人轮流在有 n 个物体的一堆物体中取物，每次可以取物体的个数不超过 a，但是不能不取．可以一次取走余下的所有物体者为胜者．问：n 和 a 满足什么关系时甲能获胜？在这种情况下，甲取胜的策略是怎样的？

解 对甲来说，当该他取的时候，他面临的情形是堆中物体的数目（用 m 表示）恰好是 $a+1$ 的倍数，则对他不利．这是因为当 $m=a+1$ 时，对甲的任意取法，他留下的物体的个数只可能是 $1, 2, \cdots, a$ 这 a 种情形中的一种，此时乙总可以将物体一次取走．当 $m=(a+1)b$（b 为自然数）时，甲取一次后，乙可以取相应的个数，使得堆中的物体个数变为 $(a+1)\cdot(b-1)$，然后依次为 $(a+1)(b-2)$，$(a+1)(b-3)$，…，经过若干次后就剩下 $a+1$ 个了，而此时乙必胜．

从上面的讨论可知，当 n 不是 $a+1$ 的倍数时，对先取者

甲有利．他采取："每次取若干个物体，使得剩下的物体个数是 $a+1$ 的倍数"这样的策略就能保证获胜．

下面是比较复杂的一个题目．

例 2　甲、乙两人轮流在一堆火柴棒中取火柴，规定：

(1) 甲不能在第一次将火柴棒全部取走；

(2) 每次所取火柴棒的根数不超过对手刚取的火柴棒根数的 2 倍，但不能不取．

取走最后一根火柴棒的人获胜．问火柴棒根数 n 是什么数时，先取的甲可以获胜？获胜的策略是什么？

解　这个问题与斐波那契(Fibonacci)数列有关．

数列

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \cdots \qquad ①$$

从第三项起，每一项都是前两项的和，称为斐波那契数列，数列的每一项 f_k 称为斐波那契数．

我们的结论是：

当且仅当 n 不是斐波那契数时，甲有必胜的策略．

首先说明这样一个事实，如果 n 不是斐波那契数，那么 n 可以表示成若干个斐波那契数的和，并且每两个斐波那契数都不在①中相邻．例如 143 不是斐波那契数，它可以写成

$$\begin{aligned}143&=89+54=89+34+20\\&=89+34+13+7=89+34+13+5+2.\end{aligned}$$

这里 89, 34, 13, 5, 2 都是斐波那契数，并且每两个在①中不是相邻的两项．●

一般地，如果 n 不是斐波那契数，那么它一定在①中某两项之间，即有

$$f_k<n<f_{k+1},$$

其中 f_k 是①中的第 k 项．

由于斐波那契数满足递推关系

$$f_{k+1}=f_k+f_{k-1},$$

所以 $$n'=n-f_k<f_{k+1}-f_k=f_{k-1}.$$

如果 n' 本身是①中的数，那么 n' 与 f_k 不是①中相邻的项，

$$n=f_k+n'$$

就是所说的表示．如果 n' 不是斐波那契数，再用上面的方法进行下去，经过有限步后就能获得所需要的表示．

现在用数学归纳法来证明上面所说的结论．

证明 当 $n=1$ 时，甲显然失败，因为他无法同时遵守规定(1)与(2)。

$n=2$ 时，甲也显然失败，因为根据规定(1)与(2)，他只能取走一根，乙就能取走余下的那一根．

这样逐步推下去，假定对于小于 m 根的火柴棒，上述结论都成立，我们考虑 m 根火柴棒，分两种情形：

情形1 m 不是斐波那契数．

m 可以表示成

$$m=f_{m_k}+f_{m_{k-1}}+\cdots+f_{m_2}+f_{m_1},$$

其中 $m_1<m_2<\cdots<m_k$，且 $m_{i+1}-m_i\geqslant 2$，$2f_{m_i}<f_{m_{i+1}}$，$i=1$，2，$\cdots$，$m-1$.

甲先取 f_{m_1} 根，这时乙无法取得 f_{m_2} 根或更多根（由于规定(2)的限制）．在这 f_{m_2} 根中，乙是先取的一方，而 f_{m_2} 是小于 m 的斐波那契数，根据归纳假定，不论乙如何取，后取的甲总可采取正确的策略取到最后一根，即第 f_{m_2} 根，然后，由于规定(2)及

$$2f_{m_2}<f_{m_3},$$

所以乙不能把下一个 f_{m_3} 根全都取走，只要甲采取正确的策略，他又可以取到这 f_{m_3} 根中的最后一根．

依次类推，甲必然可以取到m根火柴棒中的最后一根，即在这种情形下，甲有必胜的策略.

我们以 143 为例，将 143 先表示为

$$143=89+34+13+5+2.$$

甲先取 2 根，此时乙无法取得 5 根或更多根. 在这 5 根中，乙是先取的一方，而 5 是小于 $m=143$ 的斐波那契数，所以，不论乙如何取，后取的甲总可采取正确的策略取到最后一根，即第 5 根，然后，由于规定(2)及 $2\times5<13$，乙不能把下一个 13 根都取走，甲只要采取正确的策略，他又可以取到这 13 根中的最后一根.

依次类推，甲必然取到 143 根火柴棒中的最后一根.

情形 2 m 是斐波那契数 f_k.

若甲第一次所取的根数 $\geqslant f_{k-2}$，此时剩下的火柴棒根数 m' 为

$$m'\leqslant f_k-f_{k-2}=f_{k-1}=f_{k-2}+f_{k-3}<2f_{k-2},$$

那么乙可以将剩下的火柴棒全部取完.

若甲第一次所取的火柴棒根数小于 f_{k-2}，那么剩下的火柴根数 $m'<f_k$，但

$$m'>f_k-f_{k-2}=f_{k-1},$$

所以 m' 不是斐波那契数，因而有

$$m'=f_{k-1}+f_i+\cdots+f_j.$$

其中 $k-1>i>\cdots>j$，并且每两个至少相差 2.

f_j 肯定小于甲第一次所取根数 l 的两倍，否则

$$l\leqslant\frac{1}{2}f_j=\frac{1}{2}(f_{j-1}+f_{j-2})<f_{j-1},$$

从而 $$f_k=m'+l<f_{k-1}+f_i+\cdots+f_j+f_{j-1}$$

$$\leqslant\cdots\leqslant f_{k-1}+f_i+f_{i-1}$$

$$<f_{k-1}+f_{k-2}=f_k.$$

矛盾!

既然$f_i<2l$，所以乙第一次可取f_i根火柴棒，以后乙按照情形1中所说策略，逐步进行，必将取得f_i根中的第f_i根与最后f_{k-1}根中的第f_{k-1}根，就是说在这种情形时，乙有必胜的策略.

于是，我们利用数学归纳法证明了本题的结论. 证明过程中已包含了取胜的策略.

现在我们来看两堆物及多堆物对策. 先从一个简单例子谈起.

例3 两堆火柴棒分别有65和50根. 甲、乙两人轮流从这两堆火柴棒中取火柴棒，每次可以从任一堆中取任意多根(当然不会超过这一堆火柴棒的总根数)火柴棒，但是不能不取，谁取到最后一根火柴棒谁就获胜. 问：甲、乙两人谁能获胜?采取怎样的策略才能获胜?

解 我们用数对(a, b)来表示在每次取走后两堆中余下的火柴棒数目分别为a、b根，并用这种方法记录游戏过程中的状态. 于是，开始状态是(65, 50).

我们从最简单的状态着手来分析. 如果轮到甲取时，甲面临的状态是(1, 1)，按照规定，他只能在这两堆中的某一堆里把一根火柴棒取走，因而只剩下一根火柴棒，乙就可以把最后一根火柴棒取走而成为胜利者. 甲面临的这种状态是注定要失败的，我们称之为不利位置. 又如甲面临的状态是(2, 1)，那么他只需在有两根火柴棒的那一堆中取走一根火柴棒，留给乙的状态是(1, 1)这个不利位置，不管乙怎么取，都逃脱不了失败的结果. 因此，把(2, 1)称为一个获胜位置. 同样道理，状态$(n, 1)$，$n\geqslant2$，是一个获胜位置. 因为先取者只需