

小学数学疑难问题解答



山东教育出版社

小学数学疑难问题解答

钟相林 崔建国 编

山东教育出版社

一九八六年·济南

小学数学疑难问题解答

钟相林 崔建国 编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂德州厂印刷

•

787×1092毫米32开本 7.25印张 149千字

1987年2月第1版 1987年2月第1次印刷

印数1—148,000

ISBN7—5328—0031—8

G·15

书号 7275·590 定价 0.92 元

说 明

一年来，我们收到了很多全国各地的小学教师的来信，信中普遍反映：小学数学教师为了提高数学理论水平和业务能力，掀起了学习数学基础理论和研究数学教材教法的热潮。他们在进修中师的“小学数学基础理论课”和教学实际中，遇到了不少有关数学基本概念、基础理论以及解答应用题方面的疑难问题，非常需要能够帮助他们解决这些疑难问题的参考书。为了满足广大小学教师的要求，我们出版了这本《小学数学疑难问题解答》。

本书选编了小学教师在进修和教学中可能遇到的数学疑难问题一百三十七个，并作了详尽的分析、解答。基本概念和基础理论方面的问题，除了给出答案外，还作了理论上的阐述；对于应用题的解答，不是简单地给出计算公式，而是着重于题意分析、解题思路和解题规律的指导，从而使读者能够触类旁通、举一反三。

本书可以作为小学教师和中师学生的教学和学习的参考书，也可以作为学有余力的小学高年级学生的课外读物。

由于水平所限，书中不妥之处难免，敬请读者批评指正。

一九八六年

目 录

1. 什么叫自然数、自然数列? 它们有什么联系和区别?	1
2. 自然数列有哪些性质?	1
3. 数和数字有什么不同?	2
4. 计数的本质是什么?	2
5. “0”为什么不属于自然数?	3
6. 什么叫位值原则?	3
7. 最小的一位数是几?	3
8. 用罗马数字怎样记数?	4
9. 二进数与十进数怎样互相改写?	5
10. 什么叫有效数字? 什么叫无效数字?	5
11. 为什么说加法的运算是永远可能的, 并且和是唯一的?	6
12. 多位数加法的主要理论依据是什么?	6
13. 如果两个数的差存在, 为什么差一定是唯一的?	7
14. 多位数减法的主要理论依据是什么?	8
15. 加、减法有哪些运算性质?	8
16. 已知数的变化所引起的和与差的变化规律是什么?	10
17. 为什么说乘法运算也是永远可能的, 其积是唯一	

的?	10
18. 乘法有哪些运算定律?	11
19. 什么叫部分积? 什么叫完全积?	12
20. 被乘数与乘数的意义有什么不同?	13
21. 为什么要规定乘数是“0”或“1”的乘法?	13
22. 多位数乘法的主要理论依据是什么?	13
23. 在整数范围内, 为什么说如果两个数有整数商存在, 其商一定是唯一的?	14
24. 什么叫部分被除数? 什么叫部分商? 什么叫完全商?	14
25. 除法运算中, “0”为什么不能做除数?	15
26. 多位数除法的主要理论依据是什么?	15
27. 除法与减法有什么关系?	16
28. 在有余数的除法中, 余数为什么一定要小于除数?	17
29. 已知数的变化所引起的积与商的变化规律是什么?	18
30. 在有余数的除法中, 为什么说如果被除数、除数都扩大(或者缩小)同数倍, 其商不变, 但余数却随着扩大(或者缩小)同数倍?	20
31. 乘、除法有哪些运算性质?	20
32. 什么叫逆运算? 加法与减法、乘法与除法有什么关系?	22
33. 在一个四则混合算式里, 如果没有括号, 为什么要按“先乘除、后加减”的规定计算?	22
34. 什么叫做弃九验算法?	24
35. 什么叫偶数和约数? 0是自然数的倍数吗?	25

36. “0”是不是偶数?26
37. 倍数有哪些基本性质?27
38. 能被2或5、4或25、8或125整除的数的特征是什么?
么?28
39. 能被3和9整除的数的特征是什么?29
40. 能被7、11或13整除的数的特征是什么?30
41. 如果某数能同时被两个互质的数整除、为什么
这个数一定能被它们的积整除?31
42. 质数、质因数以及互质数有什么区别?32
43. “1”为什么不算质数?33
44. 整除和除尽有什么不同?34
45. 用分解质因数法求几个数的最小公倍数与最大公
约数有什么不同?34
46. 怎样判断一个数是不是质数?35
47. 为什么分数里没有基本单位?35
48. $\frac{0}{1}$ 叫什么分数?36
49. 分数 $\frac{m}{n}$ 有什么实际含义?36
50. 分数与除法有什么关系?37
51. 除与约有什么区别?37
52. 什么叫约分? 约分的方法有哪几种?38
53. 在进行异分母分数的加、减法运算时,为什么要
先通分?38
54. 一个分数的分子和分母加上或减去同一个自然
数,分数的大小有什么变化?39

55. 同分母的分数相加、减,为什么只加、减分子而分母不变?39
56. 分数加法是怎样定义的?40
57. 为什么说两个分数的和总是存在的? 并且是唯一的?41
58. 进行分数减法运算,当被减数不小于减数时,为什么差总是存在并且是唯一的?41
59. 分数乘以整数和分数乘以分数的含义有什么不同?43
60. 分数除以分数的含义是什么?可以解决什么问题?.....43
61. 分数除法法则为什么是“除以一个数,就等于乘以这个数的倒数”?44
62. 什么是十进分数? 小数就是不带分母的十进分数吗?47
63. 小数既是特殊形式的分数,为什么按照整数的记数法来记数呢?47
64. 小数的基本性质和小数的性质一样吗?48
65. 小数加减法,为什么要在小数点位置对齐的情况下才能进行计算?48
66. 在小数乘法中,积的小数位数为什么要根据被乘数和乘数小数位数的和来确定?49
67. 小数除以小数,为什么要将除数化为整数?49
68. 乘数是纯小数的乘法,计算后所得的积为什么比被乘数小?50
69. 除数是纯小数的除法,计算后所得的商为什么比被除数大?50

70. 怎样判断一个分数能否化为有限小数、循环小数？	51
71. 小数是怎样分类的？	52
72. 怎样把循环小数化为分数？	53
73. 什么是量？什么叫量数？一个量的量数和所用的 计量单位有什么关系？	55
74. 什么叫直接计量？什么叫间接计量？	56
75. 什么叫做进率？什么叫做换算率？	56
76. 什么叫度量衡？	56
77. 什么叫名数？什么叫不名数？	56
78. 什么叫名数的化法和聚法？	57
79. 公历的平年、闰年是怎样规定的？	57
80. 时刻、日期和时间有什么不同？	58
81. 比和比值有什么不同？	58
82. 求比值和化简比有什么不同？	59
83. 比、除法、分数有什么联系和区别？	59
84. 比和比例有什么不同？	60
85. 什么叫差比？什么叫倍比？	60
86. 体育比赛中的“3 : 0”是什么意思？	61
87. 什么叫连比？如何把两个比写成连比？	61
88. 正比例与反比例有什么异同？	62
89. 面积和地积有什么不同？	62
90. 体积、容积、容量有什么异同？	62
91. 什么叫等式？什么叫恒等式？	63
92. 什么叫方程？什么叫方程的元和次？	63
93. 什么叫解方程？什么叫方程的解和根？	64

94. 什么叫同解方程?	64
95. 列方程解答应用题与用算术法解答应用题有什么 联系和区别?	64
96. 什么是集合? 集合有哪几种表示方法?	65
97. 什么叫子集? 什么叫交集? 什么叫并集?	67
98. 什么叫函数? 表示函数的方法有哪几种?	68
99. 什么叫对应?	70
100. 应用题的教学有什么意义?	71
101. 算术应用题有哪些类型?	72
102. 某些典型应用题, 现行小学教材中为什么不编 入?	74
103. 平均问题是否只求平均数?	74
104. 归一问题有哪几种类型?	79
105. 归总问题为什么可以看成归一问题?	80
106. 怎样解较难的归一问题?	81
107. 怎样解典型的植树问题?	84
108. 难度较大的植树问题怎样解?	85
109. 何为和倍问题? 怎样解?	88
110. 怎样解较难的和倍问题?	89
111. 何为差倍问题? 怎样解?	92
112. 怎样解较难的差倍问题?	92
113. 什么叫变倍问题? 怎样解?	96
114. 何为倍比问题? 怎样解?	99
115. 和差问题的基本形式如何? 有怎样的解题规律?	101
116. 行程问题有哪些类型?	103

117. “相背”、“相向”、“同向”有什么区别?	104
118. 较难的行程问题有哪些形式? 怎样解?	105
119. 行船问题中的“速度”怎样理解?	116
120. 怎样解较难的行船问题?	117
121. 什么叫盈亏问题?	122
122. 怎样解较难的盈亏问题?	123
123. 盈亏问题还有哪些类型? 各怎样解?	126
124. 何为置换问题? 怎样解?	129
125. 怎样解还原问题?	134
126. 怎样解年龄问题?	137
127. 怎样解牛吃草问题?	141
128. 怎样解非典型的复合应用题?	146
129. 解分数应用题为什么要明确哪个是“标准量”?	156
130. 怎样解较难的一般分数应用题?	160
131. 何谓分数的三种基本应用题?	167
132. 怎样解较难的分数基本应用题?	171
133. 工程问题为什么不只限于工程建设?	184
134. 怎样解较难的工程问题?	188
135. 怎样解正、反比例关系的应用题?	196
136. 怎样解复比例应用题?	202
137. 怎样解按比例分配应用题?	208

1. 什么叫自然数、自然数列？它们有什么联系和区别？

从数的产生过程可以知道：用来表示物体（有）个数一、二、三、四、五……等的每一个数，都叫做自然数。

自然数列与自然数是两个不同的概念。如果从“一”起，把自然数按照由小到大的顺序排列起来，就得到一列数：

一、二、三、……

这样，由全体自然数依次排列成的一列数就叫做自然数列。

自然数列是有一定顺序的、无限个自然数的集合，而自然数仅是这个集合里的元素。

自然数不仅可以表示集合中元素的个数，另一方面，由于自然数在自然数列中是有序的，所以自然数还可以用来给集合中的元素编号，表示某个有序集合中每个元素所占的位置。一个自然数当用来表示集合中元素的个数时，叫做基数（例如一个、二个、三个等等）；一个自然数当用来表示集合中元素的排列次序时，叫做序数（例如第一、第二、第三等等）。

2. 自然数列有哪些性质？

自然数列有以下性质：

- (1) 有始性。在自然数列里最前面的一个数是“1”。
- (2) 有序性。在自然数列里每个自然数后面紧跟着一个数，而且只紧跟着一个数。
- (3) 无限性。在自然数列里没有最后面的一个数。
- (4) 在自然数列里的任何两个数都不相同，排在前面的较小，排在后面的较大。

3. 数和数字有什么不同？

用来记数的符号叫做数字。常用的数字有四种：阿拉伯数字、中国小写数字，中国大写数字，罗马数字。现在国际通用的数字是阿拉伯数字，它共有以下十个：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

数是由数字和数位组成的。在用位值原则记数时，数是由十个数字中的一个或几个根据位值原则排列起来，表示事物的个数或次序。数字是构成数的基础，配上其它一些数字符号，可以表示各种各样的数。例如，27（自然数），0（整数）， $\frac{3}{5}$ （分数），4.7（小数），-25（负数）等等。

4. 计数的本质是什么？

计数，也叫数数。计数的本质就是把要数的那个集合里的元素，与自然数列里从“一”开始的自然数，依次一个一个地“对应”起来。只要不遗漏，也不重复，数到最后的一个元素所对应的那个数，就是计数的结果。

例如，上体育课时要检查学生人数，可以列队，从头一个开始依次报数，排在末尾的一个同学报出的数，就是上课

实到的人数。

从计数的本质可以知道，在数事物时：计数的结果总是唯一的，它与数事物的次序无关；数一种事物可以用另一种事物代替，然后再数，数的结果是不变的；只要有事物可数，计数是永远可能的。

5. “0”为什么不属于自然数？

自然数是从表示“有”多少的需要中产生的，它是用来表示事物的个数的，因此自然数的计数单位是1，数数就是从“1”开始的。每当有实物存在而又需要计数时，才有数的意义。如果表示没有事物存在，当然也就谈不上数了，于是就产生了一个新的数——零，用符号“0”来表示。由此可知，零是空集合的标记，它表示集合中没有元素，所以，“0”不是自然数，它比任何自然数都小。

6. 什么叫位值原则？

用阿拉伯数字记数是把所有的数字排成一横行，每个数字所在的位置不同，所表示的计数单位也就不同。从右起第一位上的数字表示几个一，这一位叫做个位，第二位上的数字表示几个十，这一位叫做十位，以下依次类推。这种记数法，每个数字除了它本身所表示的数值之外，还有位置值，这种记数原则叫做记数的位值原则。

7. 最小的一位数是几？

要弄清这个问题，首先要明白什么是数位、位数。位数是指每个计数单位所占的位置。每个数位上的数字，就是表示这

个数位上的单位的个数。一个自然数含有数位的个数叫做位数。我们通常说的几位数，是指自然数而言。0是整数而不是自然数，也就不是一位数了，所以最小的一位数不是0。一位数有1、2、3、4、5、6、7、8、9共九个，其中最小的是1。

8. 用罗马数字怎样记数？

罗马数字共有以下七个：

I, V, X, L, C, D, M。分别表示

(一)，(五)，(十)，(五十)，(一百)，(五百)，
(一千)。

用罗马数字记数时，不是采用位值原则，而是采用加减法则。一般地，遵循以下几个原则：

(1) 某数字的右边数字与其相等或较小时，则表示相加。例如，三十一写作“XXXI”，一百零五写作“CV”。

(2) 某数字的右边数字比其大时，则表示相减。例如，四写作“IV”，四百九十九写作“ID”。

(3) 某数字之上加一横线，则表示原值的千倍。例如， $\overline{V}$ 表示五千， $\overline{C}$ 表示十万， $\overline{IX}$ 表示九千。

(4) 在需要连续写出四个相同数字时，相加改为相减，而把表示较小的数的数字写在前面。例如，四不能写作“IIII”而写作“IV”，九十不能写作“LXXXX”而写作“XC”。

下面是用罗马数字写出的较大的数的例子。

XXXVII (37) ; CDXXIX (429) , MLIV (1054)
MMMDCCLXXVIII (3678)

9. 二进制与十进制怎样互相改写?

二进制改写成十进制, 首先把二进制改写成不同计数单位的数之和的形式, 然后再写成十进制数。例如,

$$\begin{aligned}(101101)_2 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 \\ &\quad + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 32 + 0 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 + 1 \times 1 \\ &= (45)_{10}\end{aligned}$$

十进制改写成二进制, 是根据二进制“满二进一”的原则, 采取“二除取余法”。例如, 把57改写成二进制, 通常用竖式计算:

2	57	余数
2	28	 1 (右起第一位数字)
2	14	 0 (右起第二位数字)
2	7	 0 (右起第三位数字)
2	3	 1 (右起第四位数字)
2	1	 1 (右起第五位数字)
	0	 1 (右起第六位数字)

$$(57)_{10} = (111001)_2$$

10. 什么叫有效数字? 什么叫无效数字?

有效数字是对一个数的近似值的精确程度而提出的。一般地说, 一个近似数中, 从左面第一个非零的数字起到右面按四舍五入法所截得的最后一个数字止, 所有的数字都叫做这个近似值的有效数字。

例如, 近似数3.1416有五个有效数字: 3、1、4、1、

6；近似数0.00308有三个有效数字：3、0（3与8之间的零）、8，最左边的三个0都是无效数字；近似数3700，如果它的精确度是100，那么它有两个有效数字：3、7，通常表示为 3.7×10^3 ；如果它的精确度是10，那么它有三个有效数字：3、7、0，通常表示为 3.70×10^3 ；如果它的精确度是1，就有四个有效数字：3、7、0、0，通常表示为 3.700×10^3 。

11. 为什么说加法的运算是永远可能的，并且和是唯一的？

加法是一种连续性的计数，而计数时就要用到自然数。自然数列是有头无尾的、要数多少就有多少。所以，无论多大的数相加，我们都可以连续地数下去，直至数到你要数的数为止。也就是说任何两个数或两个以上的数相加，和一定存在。所以加法运算是永远可能的。此外，又因在自然数列里，没有两个或两个以上相等的数，无论哪一个自然数的后面只有且仅有一个后继数，所以无论怎样数下去，只能得到一个固定的唯一的自然数。因此，任何两个或两个以上的自然数相加的和，必然只有一个，也就是说它们的和是唯一的。

12. 多位数加法的主要理论依据是什么？

加法运算性质“若干个数的和加上若干个数的和，可以把第一个和中的各个加数分别加上第二个和中的一个加数，再把所得的和加起来”，是多位数加法的主要理论依据。

多位数加上多位数，可以先把它们分别写成不同计数单