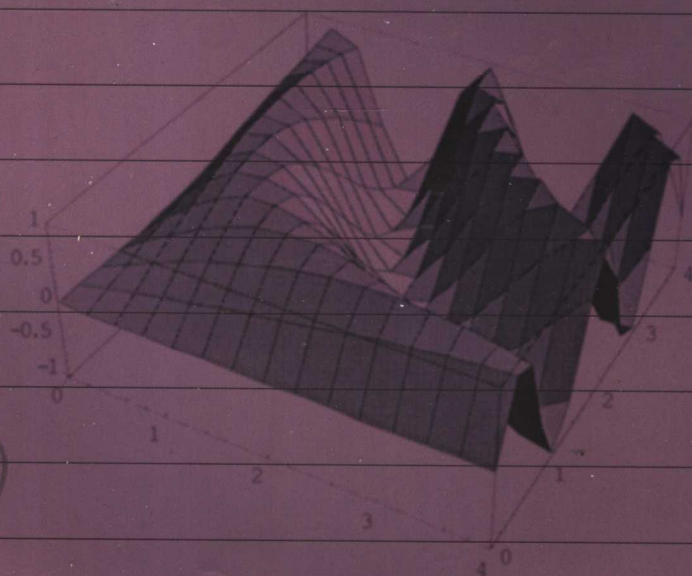


Mathematica

在电磁场理论中的应用

ZAI DIANCICHANG LILUN ZHONG DE YINGYONG

■杜建明 编著



合肥工业大学出版社

Mathematica

在电磁场理论中的应用

杜建明 编著

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

Mathematica 在电磁场理论中的应用 / 杜建明编著.
合肥:合肥工业大学出版社,2004.12
ISBN 7-81093-033-8

I. M… II. 杜… III. 数学-应用软件, Mathematica-应用-电磁场-高等学校-教材 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 114279 号

Mathematica 在电磁场理论中的应用

编著 杜建明

责任编辑 陈淮民

出版 合肥工业大学出版社
地址 合肥市屯溪路 193 号
电话 总编室: 0551-2903038 发行部: 0551-2903198
邮编 230009
网址 www.hfutpress.com.cn
E-mail press@hfutpress.com.cn
发行 全国新华书店
开本 787×1092 1/16
印张 12.75
字数 308 千字
版次 2004 年 12 月第 1 版
印次 2004 年 12 月第 1 次印刷
印刷 淮南春晖印务有限公司
照排 合肥飞天图文艺术设计中心

ISBN 7-81093-033-8/O·16

定价:18.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

内容提要

本书主要阐述了计算机代数系统 Mathematica 的基本使用方法,包括各种常用函数和软件包的使用;同时也讨论了如何借助于计算机代数系统快捷、准确地求出静态和动态电磁场,并由计算结果模拟出电磁场二维或三维图形,形象地表示出电磁场。所有程序均可在 Mathematica 环境中完成运行。

本书可以作为学习电磁场理论和计算机代数系统读者的参考书,也可作为物理学专业的选修课教材。

前 言

电磁场问题的求解通常是较复杂的,它涉及到许多数学方面的计算,如求导数和积分、特殊函数、复数运算和微分方程的求解,特别是矢量分析的应用几乎贯穿在整个电磁场问题的求解过程中。此外,为更好地描述电磁场的性质,绘制出电磁场随时空变化的图形也是十分必要的。通常我们求解电磁场都是采取手工推演的办法,对复杂的问题不仅耗时费力,而且由结果绘制的图形也只是简单的示意图;这些不足是显然易见的。

目前,Mathematica 计算机代数系统已在许多科学计算领域中有大量的应用,它不仅可以进行通常情况下的数值计算,而且还能够做许多符号运算。如果我们调用 Mathematica 内嵌的软件包,既可以做更多的复杂运算,如矢量分析和坐标系的变换等工作;也可以绘制出各类图形,图形不仅有二、三维图形,也有等高线、矢量线和动画图形。Mathematica 具有的这些功能为我们求解电磁场问题提供了极大的方便。

编写本书的目的是希望利用计算机代数系统 Mathematica 的函数和软件包求解电磁场理论中常见的问题,使求解过程变得快捷其结果更为准确,并可以运算结论用 Mathematica 图形函数展示出结果的图形。

本书共分 5 章。第 1 章是 Mathematica 概述,主要介绍 Mathematica 计算机代数系统的使用方法,通过一些例子使学习者学会基本函数的使用和常用软件包的调用。第 2、3 章是静电场、静磁场,在这两章中用较多的实例介绍 Mathematica 在求解静场中的应用,许多实例是用 Mathematica 通过各种方法推导出问题的解析表达式,并由结果绘制出静态电磁场在空间分布图。第 4、5 章是电磁场的传播和辐射,在这两章中通过实例介绍 Mathematica 在求解动态场中的应用,主要是电磁场的传播规律和辐射角分布。由于动态电磁场是随时间变化的,故有些实例要用动画形象描述。此外,由于电磁场是矢量场,求解电磁场问题需大量使用矢量运算,因此我们将在本书中反复使用 Mathematica 内嵌的矢量分析软件包,根据不同问题,在不同的坐标系下进行矢量分析运算。

本书的每一个程序实例均在 Mathematica 4.1 版本软件中进行过严格的调试,其运行稳定。需要说明的是有些程序并非是最简形式,有待读者和作者共同进一步改进完善。

作 者

2004 年 11 月

目 录

前言

第 1 章 Mathematica 概述	(1)
1.1 Mathematica 的基本操作	(1)
1.2 代数运算	(5)
1.3 微积分和微分方程	(13)
1.4 三角函数与特殊函数	(21)
1.5 线性代数	(24)
1.6 矢量场和矢量分析	(29)
1.7 Mathematica 作图	(31)
第 2 章 静电场	(44)
2.1 静电场的基本内容和公式	(44)
2.2 分布电荷的电场	(47)
2.3 分离变量法	(59)
2.4 电象法	(72)
2.5 复变函数法	(77)
2.6 有限差分法	(84)
第 3 章 静磁场	(87)
3.1 静磁场的基本内容和公式	(87)
3.2 带电粒子在静止电磁场中运动	(89)
3.3 稳恒电流的磁场	(92)
3.4 静磁场微分方程的求解	(104)
3.5 磁性物体的磁场	(110)
第 4 章 电磁场的传播	(121)
4.1 基本内容和公式	(121)
4.2 电磁感应和平面电磁波	(123)
4.3 电磁波在介质界面上的反射和折射	(128)
4.4 电磁波在导体中的传播	(134)

4.5	微波在波导管内的传播	(146)
第5章	电磁场的辐射	(158)
5.1	基本内容和公式	(158)
5.2	电偶极子辐射	(159)
5.3	磁偶极子辐射	(167)
5.4	电四极子辐射场	(173)
5.5	天线辐射	(176)
5.6	电磁波的衍时	(180)
5.7	介质对电磁波的吸收和色散	(183)
附录1	数学公式	(186)
附录2	Mathematica 的常用命令和函数	(189)
 主要参考书目		

第 1 章 Mathematica 概述

Mathematica 是美国 Wolfram Research 公司开发的数学软件。它的主要使用者是从事理论研究的数学工作者和其它科学工作者,以及从事实际工作的工程技术人员。Mathematica 可以用于解决各种领域的复杂的符号计算和数值计算的问题。对以前只能借助于手工推导才能解决的问题,现在可以很方便地用它来完成。

Mathematica 主要可以做数值运算、符号运算和图像处理三項工作。尤其在符号演算工作中,它显示出强大的功能:它能对符号进行多项式的计算、因式分解、展开,以及求解方程、极限、导数、积分等。它也能进行数值的或一般代数式的向量、矩阵的各种计算。用 Mathematica 可以很方便地画出用各种方式表示的一元或二元函数的图形。通过这样的图形,我们可以立即形象地把握住函数的某些特性,而这些特征一般很难从函数的符号表达式中看清楚。Mathematica 还是一个很容易扩充和修改的系统,它提供了一套描述方法,相当于一个编程语言,用这个语言写程序可以解决各种特殊问题。

1.1 Mathematica 的基本操作

如果在 Windows 环境下已安装好 Mathematica4.1,启动 Windows 后,在“开始”菜单的“程序”中单击 Mathematica4.1。在屏幕上显示如图 1-1 的 Notebook 窗口,系统暂时取名 Untitled-1,直到用户保存时重新命名为止。

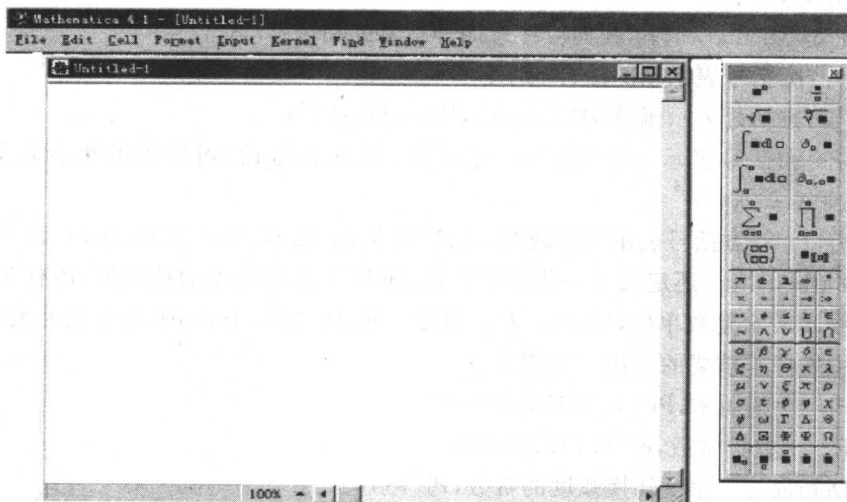


图 1-1 Mathematica4.1 窗口

图 1-1 右边是基本输入模板,通过这个模板可以很快输入最常用的数学符号或运算符。

如果在屏幕上没有见到这个模板,可从 File 菜单中激活 Plaettes→BasicInput 模板。

执行 Mathematica 程序需敲 Shift+Enter 键或敲数学键盘上的 Enter 键,例如在 Notebook 中输入 $8+8$,现执行程序可行 16。运算界面如图 1-2 所示:

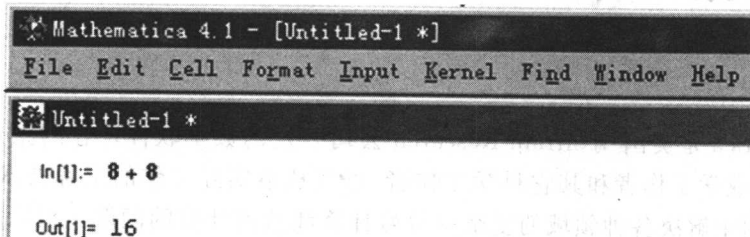


图 1-2 Mathematica 的输入和输出

从上图可看出,输入表达式被赋予 In[1]:= 标签,输出表达式被赋予 Out[1]= 标签,表示运算的第一步。类似的第 n 步被赋予 In[n]:= 和 Out[n]=,以示运算的过程。用户也可以通过 Kernel 菜单中的 Show In/Out Names 选项去掉这些提示。Mathematica 启动后的首次计算时,需将执行计算的核心程序调入进行初始化,因此需要等待片刻。再次执行计算时,速度就很快了。

1.1.1 Mathematica 的基本语法特点

(1) Mathematica 中大写小写是有区别的,如 plot、Plot 是不同的变量名或函数名。自定义的变量可以取几乎任意的名称,长度不限,但不可以数字开头。Mathematica 中的函数分为两类。一类是常用的数学函数,如:绝对值函数 Abs[x],正弦函数 Sin[x],余弦函数 Cos[x],以 e 为底的对数函数 log[x],以 a 为底的对数函数 Log[a, x]等;第二类是命令意义上的函数,如作函数图形的函数 Plot[f[x], {x, xmin, xmax}],解方程函数 Solve[eqn, x],求导函数 D[f[x], x]等。

(2) 在 Mathematica 中,我们应注意四种括号的用法:

() 圆括号表示项的结合顺序;

[] 方括号表示函数,如 Log[x], BesselJ[x, 1];

{ } 大括号表示一个“表”(一组数字、任意表达式、函数等的集合),如 {2x, Sin[12Pi], {1+A, y*x}};

[[]] 双方括号表示“表”或“表达式”的下标,如 a[[2, 3]], {a, b, c}[[1]] = a。

(3) Mathematica 还定义了一些系统常数,如 Pi 表示圆周率的精确值,还有 E 表示自然对数的底数, I 表示复数单位, Degree 表示角度一度, Pi/180, Infinity 表示无穷大等,这些常数在运算中发挥了重要的作用。列表如下:

Pi 圆周率, $Pi = 3.141592654\dots$

E 尤拉常数, $e = 2.71828182\dots$

Degree 角度转换弧度的常数, $Pi/180$

I 虚数,其值为

Infinity 无限大

(4) 乘法即可以用 *, 又可以用空格表示,如 $2\ 3 = 2 * 3 = 6$, $x\ y$, $2\text{Sin}[x]$ 等;乘幂可以用 “^” 表示,如 x^4 , $\text{Tan}[x]^y$ 。

(5) 在输入语句时,以分号结束的语句行或表达式,Mathematica 默认不显示计算结果,否则将输出计算的结果。

(6) 要想查询某一函数的具体用法可在 Notebook 界面下,用? 或?? 可向系统查询运算符、函数和命令的定义和用法,获取简单而直接的帮助信息。也可用 Options[函数名]查询。当然,要想主动地去了解更多的函数,可在 Mathematica 界面上单击帮助菜单项的 Help Browser,可了解有关函数的更多信息。

1.1.2 Mathematica 的主要功能

(1) 基本计算功能

Mathematica 具有强大的数值计算功能。只要输入计算命令,再同时按下 Shift 和 Enter 键,Mathematica 就将输出结果,例如:

$$3 + 46 - 12$$

$$37$$

求 3^{110} 的值:

$$3^{110}$$

$$30432527221704537086371993251530170531786747066637049$$

求 35.8^8 的值:

$$35.8^8$$

$$2.69814 \times 10^{12}$$

Mathematica 还可以对矩阵进行运算,下面我们用函数 Eigensystem 求出矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量:

$$\text{Eigensystem}\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\{\{0, 4\}, \{\{1, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

其中 0 和 4 是特征值,对应的特征向量分别是 $\{1, 1\}$ 和 $\{-1, 1\}$ 。

(2) 符号计算功能

Mathematica 系统的一个很重要的特点就是进行符号运算。例如求方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根,方法和结果如下:

$$\text{Solve}[ax^2 + bx + c == 0, x]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$$

求积分 $\int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx$, 其结果用符号解给出。

```
simplify[Integrate[Sin[x] Exp[-a x], {x, 0, ∞}], Re[a] > 0]
```

$$\frac{1}{1+a^2}$$

(3) Mathematica 的绘图功能

Mathematica 具有强大的图形功能,它可以绘制各种函数的二维或三维图形,图 1-3 是 $x+4\sin(x)$ 的二维图形。

```
Plot[x + 4 Sin[x], {x, 0, 16}];
```

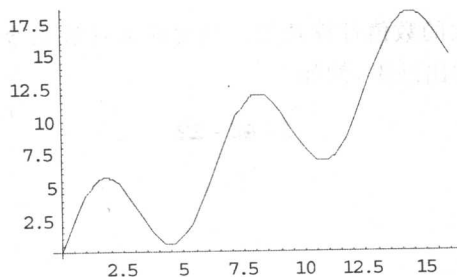


图 1-3 二维图形

用 Mathematica 的函数也可以绘制三维图形,图 1-4 绘制了半径为 2 的球面图形。

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`
```

```
SphericalPlot3D[2, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi}];
```

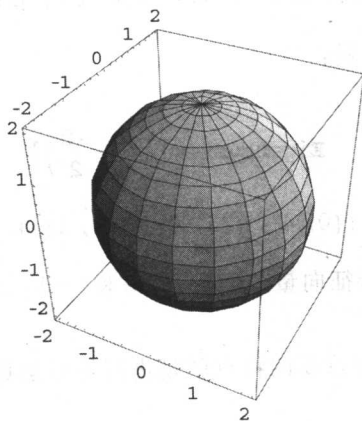


图 1-4 三维图形

以上只是介绍了 Mathematica 的基本功能,除此以外,Mathematica 还可以进行许多更复杂的数学运算,绘制各种类型的二维和三维图形。后面的几节将介绍这些功能。

1.2 代数运算

1.2.1 数的表示及计算

在 Notebook 界面上,可以对大量数值进行计算,Mathematica 总会以非常精确的形式输出结果。例如:

$$\frac{12}{7} + \frac{5}{33}$$

$$\frac{431}{231}$$

如果要想得到近似值可用求值函数 $N[\text{expr}, n]$, expr 是数值表达式, n 是有效数值的位数。

$$N\left[\frac{12}{7} + \frac{5}{33}, 30\right]$$

$$1.86580086580086580086580086580$$

Mathematica 许多函数直接可以用来做数值计算,例如求方程数值解函数 $NSolve$ 、数值积分函数 $NIntegrate$ 、数值求和函数 $NSum$ 等等。

1.2.2 变量与变量赋值

在 Mathematica 中,给变量赋值常用“=”表示,我们既可以给变量赋数字值,也可以给变量赋符号值。例如让 x 赋值 5,而 y 赋值 a 。

$$x = 5; y = a;$$

则在以后的运算中,当需调用 x 或 y 的表达式时,Mathematica 将用所赋的值替代它们,例如:

$$x^2 + y^2$$

$$25 + a^2$$

如果你需要用到上一步的运算结果,可以用 % 代替整个上一步的运算结果,事实上,你也可以用以前运算的第 n 次结果,如 %% 表示倒数第二次的运算结果。

$$\% + b$$

$$25 + a^2 + b$$

另一种变量赋值类似于变量的替换,用 (/.) 表示,例如在代数式 $4x^2 + 2$ 中进行 $x = 2$ 的替换:

$$4x^2 + 2 /. x \rightarrow 2$$

$$102$$

表达式 $x^2 - 7x + 3$ 由 $x = a + b$ 代替:

$$x^2 - 7x + 3 /. x \rightarrow a + b$$

$$3 - 7(a + b) + (a + b)^2$$

在同一行中可以输入多个语句,语句之间用(;)分开。当你需要 Mathematica 进行运算而不需要对结果输出时,可以在表达式后面放一个分号(;)。

1.2.3 函数的定义

在 Mathematica 中,函数的定义是用“:=”表示。例如:

$$f[x_] := x^2 + 6$$

定义以后,Mathematica 会自动使用已定义的规则,例如求 $x=a+b$ 时的 $f[x]$ 值:

$$f[a + b]$$

$$6 + (a + b)^2$$

根据已定义的函数,用函数 Plot 可以画出它的图形曲线。如图 1-5。

$$\text{Plot}[f[x], \{x, -2, 2\}]$$

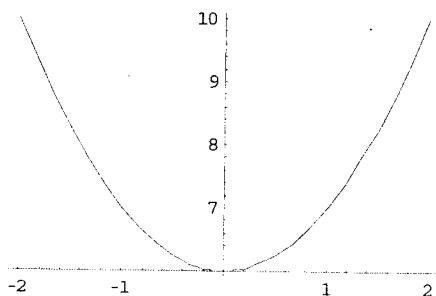


图 1-5 二维图形

注意函数的定义中下划线是重要的。如果你结束函数的使用,可以用命令 Clear[f] 消除 f 的定义。

1.2.4 多项式的操作

多项式的运算与表达式的运算基本类似,表达式的各种输出形式也可用于多项式的输出。Mathematica 提供一组按不同形式表示代数式的函数:

Expand[expr] 按幂次展开多项式 expr

ExpandAll[expr] 全部展开多项式 expr

Factor[expr] 对多项式 expr 进行因式分解

Simplify[expr] 把多项式化为最简形式

FullSimplify[expr] 把多项式展开并化简

Collect[expr, x] 把多项式 expr 中的 x 的同次幂合并

Coefficient[expr, x] 给出多项式 expr 中的 x 项的系数

Coefficient[expr, x, n] 给出多项式 expr 中的 x 项的 n 次幂的系数

在代数运算中,对多项式的乘积和分式进行展开是非常必要的,Expand 和 ExpandAll

最常用,后者比前者展开得更为彻底。

例:把 $(x+y)^5$ 展开:

$$\text{Expand}[(x+y)^5]$$

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

函数 ExpandAll 不仅可展开分式的分子项,也同时展开分式的分母项。

例:把 $\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}$ 式的分子与分母同时展开:

$$\text{ExpandAll}\left[\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}\right]$$

$$\frac{x^4}{x^2-2xy+y^2} + \frac{4x^3y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{6x^2y^2}{x^2-2xy+y^2} + \frac{4xy^3}{x^2-2xy+y^2} + \frac{y^4}{x^2-2xy+y^2}$$

用函数 Factor 对上面结果因式分解:

$$\text{Factor}[\%]$$

$$(x+y)^5$$

在 Mathematica 中,符号运算的结果通常是没有化简的,与人工计算的答案不同。但是 Mathematica 提供了很强的化简功能,能自动或在人工参与下将结果化简,最终得到较满意的答案。常用的化简函数是 Simplify,以下是函数 Simplify 使用的一些例子。

例:用 Simplify 化简 $\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x+y}$ 。

$$\text{Simplify}[(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)/(x+y)]$$

$$(x+y)^2$$

Simplify 是一个很有用的函数,也可置于表达式后部,用//使其与表达式分开。

$$(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)/(x+y) // \text{Simplify}$$

$$(x+y)^2$$

此外,Simplify 还可让人们函数设定条件。例如对 $\sqrt{a^2}$ 进行化简:

$$\text{Simplify}[\text{Sqrt}[a^2]]$$

$$\sqrt{a^2}$$

从结果可看出 Simplify 没有完成化简。如果设定 $a>0$,则化简为:

$$\text{Simplify}[\text{Sqrt}[a^2], a > 0]$$

$$a$$

例:对多项式 $x+4y+5xy$ 分别按 x 和 y 的同次幂合并。

按 x 的同次幂合并:

```
Collect[x + 4 y + 5 x y, x]
4 y + x (1 + 5 y)
```

按 y 的同次幂合并:

```
Collect[x + 4 y + 5 x y, y]
x + (4 + 5 x) y
```

例:求多项式 $x^4 + 9x^3y - xy^3 + y^4$ 中的 x^3 的系数:

```
Coefficient[x^4 + 9 x^3 y - x y^3 + y^4, x^3]
9 y
```

例:求多项式 $(x+1)^{16}$ 中的 x^9 的系数:

```
poly = (x + 1) ^ 16;
Coefficient[poly, x, 9]
11440
```

1.2.5 列表

列表是由一组对象构成的对象。列表的应用非常广泛,而关于列表的命令函数也有很多,列表用大括号表示,括号内是一系列元素,元素之间用逗号分开。

函数 List 可定义一列表,如:

```
List[a, b, c, d]
{a, b, c, d}
```

当然也可用大括号直接定义:

```
list1 = {a, b, c, d}
{a, b, c, d}
```

有时列表中还包含列表,称嵌套列表。如 $List2 = \{a, \{b, c\}, \{d, e, f\}\}$

```
list2 = {a, {b, c}, {d, e, f}}
{a, {b, c}, {d, e, f}}
```

列表的常用操作命令有:

First[list] 给出列表 list 的第一个元素,也可用 list//First

Part[list,k] 给出列表 list 的第 k 个元素,也可用 list[[k]]表示列表的第 k 个元素

1.2.6 求和与求积

在 Mathematica 中,数学上的求和用函数 Sum 表示,连乘用 Product 表示。下面列出求和与求积函数的形式和意义:

Sum[f, {i, imin, imax}] 求和

Sum[f, {i, imin, imax, di}] 求和,变量 i 以步长 di 增加

`Product[f, {i, imin, imax}]` 求积

`Product[f, {i, imin, imax, di}]` 求积, 变量 i 以步长 di 增加

下面是一些求和与求积的例子:

例: 求 $\sum_{k=1}^{20} 2k$ 的值。

`Sum[2 k, {k, 1, 20}]`

420

例: 求 $\sum_{k=1}^7 \frac{x^k}{k!}$ 的表示式, k 为奇数。

`Sum[ $\frac{x^k}{k!}$ , {k, 1, 7, 2}]`

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

例: 求 $\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2}$ 的值和近似值。

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{3121579929551692678469635660835626209661709}{1920815367859463099600511526151929560192000}$$

也可用 `NSum` 可直接给出求和式的近似值, 即:

`NSum[ $\frac{1}{k^2}$ , {k, 50}]`

1.62513

例: 求 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ 的值。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

例: 求 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k^2})$ 的值。

$$\text{Product}\left[1 + \frac{1}{k^2}, \{k, 1, \infty\}\right]$$

$$\frac{\text{Sinh}[\pi]}{\pi}$$

1.2.7 复数与复数的运算

复数有实部和虚部两部分。实部和虚部可以是整数无理数也可以是变量。在 Mathematica 中用 I 表示虚数单位 $I = \sqrt{-1}$ 。常用复数运算函数有：

`Re[expr]` 求出表达式的实部

`Im[expr]` 求了表达式的虚部

`ComplexExpand[expr]` 展开表达式并设所有变量均为实数量

`Conjugate[expr]` 求表达式的共轭量

`Abs[expr]` 求表达式的绝对值

`Arg[expr]` 求表达式的复角

例：求复数 $5+6i$ 的实部， $63+75i$ 的绝对值和 $7-45i$ 的共轭量：

$$\text{Re}[5 + 6 I]$$

$$5$$

$$\text{Abs}[63 + 75 I]$$

$$3\sqrt{1066}$$

$$\text{Conjugate}[7 - 45 I]$$

$$7 + 45 i$$

但用 `Conjugate` 做符号运算时会出现问题，如求 $x+yi$ 的共轭量时却无能为力，这是因为 Mathematica 并不知道 x, y 是否为复变量。如果 x, y 是实变量，可结合 `ComplexExpand` 使用，求出 $x+yi$ 的共轭量。

$$\text{Conjugate}[x + I y]$$

$$\text{Conjugate}[x + i y]$$

上面运算表明 `Conjugate` 不能求出 $x+iy$ 的共轭量，以下结合 `ComplexExpand` 求出它的共轭量。

$$\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[x + I y]]$$

$$x - i y$$

`Complex` 的一个属性是可以对一些更复杂的复函数展开，并假定所有变量均为实参量。

例：设 x, y 均为实变量，求 $x+yi$ 的绝对值。

$$\text{ComplexExpand}[\text{Abs}[x + i y], \text{TargetFunctions} \rightarrow \{\text{Re}, \text{Im}\}]$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$