教育部高职高专规划教材

传感器及应用技术

第二版

沈聿农 主编
董尔令 主审

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

传感器及应用技术

第二版

沈聿农　主　编
王永红　副主编
董尔令　主　审

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京)新登字039号

图书在版编目(CIP)数据

传感器及应用技术/沈聿农主编．—2版．—北京：化学工业出版社，2005.7
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-7474-3

Ⅰ.传… Ⅱ.沈… Ⅲ.传感器-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ.TP212

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第078304号

教育部高职高专规划教材
传感器及应用技术
第二版
沈聿农 主 编
王永红 副主编
董尔令 主 审
责任编辑：张建茹 王丽娜
责任校对：战河红
封面设计：郑小红
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码100029）
购书咨询：(010)64982530
(010)64918013
购书传真：(010)64982630
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
三河市东柳装订厂装订
开本787mm×1092mm 1/16 印张13½ 字数330千字
2005年8月第2版 2005年8月北京第5次印刷
ISBN 7-5025-7474-3
定 价：21.00元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

第二版前言

根据教育部高等教育司的要求，化学工业出版社在2001年陆续出版了电类专业教材共20种。此套教材立足高职高专教育培养目标，遵循社会的发展需求，突出应用性和针对性，加强实践能力的培养，为高职高专教育事业的发展起了很好的推动作用。一些教材多次重印，受到了广大院校的好评。通过近四年的教学实践和全国高等职业教育如何适应各院校各学科体制的整合、专业调整的需求，于2004年底对此套教材组织了修订工作。

本教材为适应这种新形势，在满足教学大纲要求和新技术发展的需要，大部分保持原教材内容不变的情况下，也对部分内容作出了相应的增减，使其更加符合教学的要求。

传感器作为测控系统中对象信息的入口，它在现代化事业中的重要性已被人们所认识。随着信息时代的到来，国内外已将传感器技术列为优先发展的科技领域之一。国内也有很多高等院校开设了相应的课程，所使用的教材在原理性与实用性、传统性与新型性，以及广度与深度上各有侧重。

针对近年来传感器新技术飞速发展的现状，本书通过精选内容，以有限的篇幅取得比现有教材更大的覆盖面，在不削弱传统的较为成熟传感器基本内容的前提下，以较大的篇幅充实了新型传感器内容，用以紧跟高新技术的发展，使专业面拓宽，同时也更加适应传感器的开发和应用的需要。

鉴于传感器的种类繁多，涉及的学科广泛，不可能也没有必要对各种具体传感器逐一剖析。本书在编写中力求突出共性基础及误差分析；对各类传感器则注重机理分析与应用介绍，并在附录中增加常用传感器的实验、实训内容，以配合教材的使用，使本书更加适应高等职业技术学院学生的学习。

本书由沈聿农主编，王永红为副主编，沈聿农编写了第四、五、七、八章，王永红编写了第二、六、十章，王彤编写了第一、三、九章，王永红和李剑编写了附录部分。全书由沈聿农负责统稿，并由南京航空航天大学董尔令教授负责审稿。

本书在编写过程中，得到了参编老师所在院校的大力支持，在此深表谢意。传感器技术涉及的学科众多，而作者学识有限，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正！

编者

2005.6

第一版前言

根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》精神，为满足高职高专电类相关专业教学基本建设的需要，在教育部高教司和教育部高职教育教学指导委员会的关心和指导下，全国石油和化工高职教育教学指导委员会广泛开展调研，召开多次高职高专电类教材研讨会，组织编写了20本面向21世纪的高职高专电类专业系列教材，供工业电气化技术、工业企业电气化、工业电气自动化、应用电子技术、机电应用技术及工业仪表自动化、计算机应用技术等相关专业使用。

本套教材立足高职高专教育人才培养目标，遵循主动适应社会发展需要、突出应用性和针对性、加强实践能力培养的原则，组织编写了专业基础课程的理论教材和与之配套的实训教材。实训教材集实验、设计与实习、技能训练与应用能力培养为一体，体系新颖，内容可选择性强。同时提出实训硬件的标准配置和最低配置，以方便各校选用。

由于本套教材的整体策划，从而保证了专业基础课与专业课内容的衔接，理论教材与实训教材的配套，体现了专业的系统性和完整性。力求每本教材的讲述深入浅出，将知识点与能力点紧密结合，注重培养学生的工程应用能力和解决现场实际问题的能力。

传感器作为测控系统中对象信息的入口，它在现代化事业中的重要性已被人们所认识。随着信息时代的到来，国内外已将传感器技术列为优先发展的科技领域之一。针对近年来传感器新技术飞速发展的现状，本书通过精选内容，以有限的篇幅取得比现有教材更大的覆盖面，在不削弱传统的较为成熟传感器基本内容的前提下，更充实了新型传感器内容，拓宽了专业面，并紧跟高新技术的发展，以适应传感器开发、应用的需要。

鉴于传感器种类繁多，涉及学科广泛，不可能也没有必要对各种具体传感器逐一剖析。本书在编写中力求突出共性基础及误差分析，对各类传感器则注重机理分析与应用介绍，并在附录中增加常用传感器的实验内容，以配合教材使用。

本书由沈聿农主编，王永红为副主编，沈聿农编写了第四、五、七、八章，王永红编写了第二、六、十章，王彤编写了第一、三、九章，王永红和李剑编写了附录实验指导。全书由沈聿农负责统稿，并由南京航空航天大学董尔令负责审稿。本书可作为高等院校检测技术、仪器仪表、工业自动化等专业的教材，也可以作为有关专业人员的参考书。

本书在编写过程中，得到了化学工业出版社有关同志的大力支持，在此深表谢意。传感器技术涉及的学科众多，而作者学识有限，书中难免存在错误和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

内 容 提 要

本书主要对工业自动化专业所涉及到的常用传感器的基本原理、结构和应用技术进行了完整介绍。本教材具有一定的理论深度，较宽的专业覆盖面，同时强化技术性，注重应用性，增加了相关的实验内容，以方便组织教学、提高学生的工程实践能力为其特色。

全书共10章，第一章阐述检测技术领域的一些基本概念及测量方法、误差分析的基础理论和测量数据的误差分析计算方法，对传感器的一般特性及评价方法做了理论上的分析及论证，对各种常用传感器的发展趋势进行探讨。从第二章至第九章主要对电阻式、电容式、变磁阻式、压电式、热电式、光纤式、光电式、霍尔式的常用传感器，从工作原理、结构、测量电路和应用实例等几个方面较为详细地加以介绍。本书第十章还针对石油、化工、电厂等企业的常用传感器应用技术进行了描述，使学生了解和掌握常用传感器使用和工程设计的主要方法。

本书可作为高职高专院校检测技术、仪器仪表、工业自动化等专业的教材，也可作为有关专业人员的参考书。

目　　录

第一章

测量技术概述

内容提要：本章首先介绍测量的概念及测量的一般方法，然后简要讨论用于对测量结果进行分析的误差理论的基本知识，最后概述在测量中最广泛使用的传感器的概念、分类、组成、发展、及其特性。

第一节　测量的一般知识

一、测量的基本概念

在生产过程、科学实验或日常生活中，人们常常必须知道一些量（如温度、压力、人的身高、体重等）的大小，这时就需要对这些量进行测量。

要进行测量，首先要确定一个测量的标准，也就是所谓测量单位。例如测量温度的高低，可以℃（摄氏度）或℉（华氏度）为测量单位；测量人的身高，可以 m（米）或 ft（英尺）为测量单位。所谓测量，就是将被测量与测量单位进行比较，得到被测量是测量单位的多少倍，并用数字和单位表示出来。

若要测量被测量 X，先选定测量单位 U，然后求出二者的比值 $n=X/\mathrm{U}$，被测量就可表示为

$$X=n\mathrm{U} \tag{1-1}$$

例如要测量人的身高 h，先选定测量单位为 cm，然后用 cm 去度量人的身高，若确定 h 是测量单位 cm 的 170 倍，则测量的结果就表示为 $h=170\mathrm{cm}$。

再例如要测量温度 T，先选定测量单位为℃，然后用℃去度量温度，若确定 T 是℃的 -5 倍，则测量的结果就表示为 $T=-5$℃。

由上可见，测量实际上是一个比较的过程。测量的结果应包含两部分：一部分是一个数值的符号（正或负）和大小，另一部分是测量单位。没有测量单位，测量结果是没有意义的。

二、测量方法

在有些情况下进行测量的方法很简单，例如要测量人的身高，就用刻有长度单位的尺子进行量度；要测量水杯中水的温度，就用刻有温度单位的温度计进行度量。但有些情况下，由于被测量的种类及数值大小、被测物的形态及测量的环境条件、对测量精度与速度的要求等因素的不同，所需采用的测量方法并非总是这么简单，有时甚至是非常复杂的。

总的来说，测量方法分为直接测量和间接测量两大类。

(一) 直接测量

所谓直接测量，就是能直接得到被测量的数值的测量方法，以下几种常用的测量方法都属于直接测量。

1. 直接比较测量法

上述测量温度及人的身高就是采用的直接比较测量法，即将被测量直接与已知其值的同类量进行比较，从而求出被测量的测量方法。

直接比较测量法所使用的测量工具一般是直读指示式仪表，如标度尺、玻璃温度计、电流表、电压表等。测量仪表已预先用标准量具进行了分度和校准。测量过程中，测量人员根据被测量对应在仪表上的刻度，读出其指示值，再乘以测量仪器的常数或倍率，即可完成对被测量的测量。

显然，这种测量方法的测量过程非常简单、方便，在实际工作中广泛使用。

2. 微差测量法

先举一个日常生活中的例子。某人（称为甲）想知道另一人（称为乙）的身高，但没有足够长的尺子。若甲知道自己的准确身高为170cm，他只需和乙并排站在一起，用一个短尺量出乙比他高出5cm，于是就可通过测量出的差别计算出乙的身高为175cm。

上述例子就是采用的微差测量法，它是将被测量和与其量值只有微小差别的已知量进行比较，测出这两个量值间的差值，从而确定被测量的测量方法。

这种测量方法的优点是，当已知量的精确度很高，而其值又很接近被测量时，用较低精度的测量仪表，也能得到高精确度的测量结果。关于这一点，将在本章第二节中进行进一步分析。

由于微差测量法具有上述优点，所以获得了极广泛的应用。例如在计算机控制的连续轧钢生产线上，为了保证钢板厚度的均匀，将板厚的设定值取为已知的标准量，用X射线测厚仪来测量实际的板厚与设定值的偏差，并将检测结果输入计算机，由计算机据此发出相应的调整命令。

3. 零位测量法

很多人在中学的化学实验中都使用过或至少看到过天平称重：将被测物放入天平的一个托盘，在另一个托盘中加上不同的砝码，当天平达到平衡时，则被测物的质量就等于另一托盘中所加砝码的质量之和。

上述天平称重使用的就是零位测量法，即通过调整一个或几个已知数值的量使之与被测量达到平衡，从而确定被测量的测量方法，也称为平衡测量法或补偿测量法。

使用这种方法的测量仪表中，应包括标准量具和一个指零部件。在测量过程中，手动或自动地调整标准量具，使之与被测量的偏差达到零，这个过程称为平衡操作或补偿操作，偏差为零的状态成为平衡状态。当测量系统被调整到平衡状态时，标准量具对应的数值就是被测量的测量结果。

零位测量法的优点是可获得较高的精确度；缺点是测量中需进行平衡操作，测量过程较复杂。这种测量方法在工程参数测量和实验室测量中应用很普遍，如上述的天平称重、电位差计和平衡电桥测毫伏信号或电阻值、零位式活塞压力计测压等。

(二) 间接测量

先来看一个例子。图1-1所示为一个均匀长方体，现需测量其密度ρ。

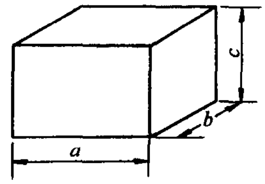

图 1-1　均匀长方体

密度的单位为 kg/m^3（千克/米³），对于具有这种单位的量值，显然无法直接进行测量。因此只能先直接测量出该长方体的三个边长 a、b、c 及其质量 m，然后利用公式 $\rho=\frac{m}{abc}$ 求出密度 ρ。

上例所使用的测量方法是，先对一个或几个与被测量有确定函数关系的量进行直接测量，然后通过代表该函数关系的公式、曲线或表格求得被测量，这类测量方法就称为间接测量。

一般来说，间接测量法需要测量的量较多，因此测量和计算的工作量较大，引起误差的因素也较多。通常在采用直接测量很不方便，或误差较大，或缺乏直接测量仪器时，才使用间接测量。

第二节　误差理论基础

一、误差的基本概念

要取得任何一个量的值，都必须通过测量完成。但实际上，任何测量方法测出的数值都不可能是绝对准确的，即总是存在所谓的“误差”。

任何一个量的绝对准确值只是一个理论概念，称之为这个量的真值，指严格定义的一个量的理论值。真值在实际中永远也无法测量出来，因此为了使用的目的，通常用约定真值来代替真值。所谓约定真值，就指的是与真值的差可以忽略而可以代替真值的值。

在实际中，用测量仪表对被测量进行测量时，测量的结果与被测量的约定真值之间的差别就称为误差。

根据不同的标准，可对误差进行不同的分类。

（一）按表示方法对误差的分类

1. 绝对误差

绝对误差就是测量结果减去被测量的约定真值所得的差值，可用下式表示

$$\Delta x=x-x_0 \tag{1-2}$$

式中　Δx——绝对误差；

x——测量结果，也称测量值或示值；

x_0——约定真值。

测量仪器应定期送计量部门进行检定（即校准），由上一级标准给出该仪器的修正值。所谓修正值，就是与绝对误差大小相等、符号相反的量，用 C 表示，则 $C=-\Delta x=x_0-x$。于是被测量的约定真值 $x_0=x+C$。

应该说明的是，修正值必须在仪器检定的有效期内使用，否则要重新检定，以获得准确的修正值。

2. 相对误差

相对误差就是绝对误差除以被测量的约定真值，并用百分数表示

$$\delta=\frac{\Delta x}{x_0}\times 100\% \tag{1-3}$$

【例 1-1】　图1-2所示为采用微差测量法测量某物体的高度 L。现已知标准量块的高度

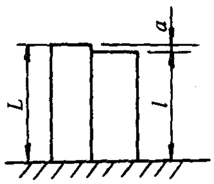

图 1-2　微差测量法

$l=500\text{mm}$，测量工具是存在 $\Delta=0.05\text{mm}$ 绝对误差的标尺，测出微差 $a=5\text{mm}$。试比较测量 a 与 L 的相对误差。

解　测量 a 时的相对误差为

$$\frac{\Delta}{a}\times100\%=\frac{0.05}{5}\times100\%=1\%$$

认为已知量 l 的精度很高，所以微差测量法测量 L 的相对误差为

$$\frac{\Delta}{L}\times100\%=\frac{\Delta}{l+a}\times100\%=\frac{0.05}{500+5}\times100\%\approx0.01\%$$

显然，$\frac{\Delta}{L}\ll\frac{\Delta}{a}$，这一结果就印证了本章第一节所提到的采用微差测量法时，用较低精度的测量仪表，也能得到较高精度的测量结果，当然前提是已知量的精确度要足够高。

3. 引用误差

任何测量仪表都存在误差，但是不同的仪表，由于其制造精度的不同，在测量同一个被测量时，误差就不尽相同。那么如何来衡量不同仪表的测量误差呢？

相对误差比较全面地表征了测量的精度，但它与被测量数值的大小有关，在一个仪表的整个测量范围内并不是一个定值。因此，选用仪表在其极限测量值时的相对误差这一定值，来对不同仪表的测量精度进行比较，这一定值就是所谓的引用误差，它等于绝对误差除以仪表的量程，并用百分数表示

$$\gamma=\frac{\Delta x}{x_m}\times100\%=\frac{\Delta x}{x_{max}-x_{min}}\times100\% \tag{1-4}$$

式中　x_m——仪表的量程；

x_{max}——仪表量程的上限值；

x_{min}——仪表量程的下限值。

通常以最大引用误差来定义测量仪表的精度等级，即

$$s\leqslant\gamma_m=\frac{\Delta x_m}{x_m}\times100\% \tag{1-5}$$

式中　γ_m——最大引用误差；

Δx_m——仪表量程内出现的最大绝对误差；

s——仪表的精度等级。

关于精度等级，将在本章第四节中做进一步说明。

【例 1-2】　已知某一被测电压约 10V，现有如下两块电压表：①150V，0.5 级；②15V，2.5 级。问选择哪一块表测量误差较小？

解　用表①时，其 $s=0.5$，即 $\gamma_m=0.5\%$，故测量中可能出现的最大绝对误差为

$$\Delta U_m=U_m\gamma_m=150\times0.5\%=0.75\text{V}$$

用表②时　$$\Delta U_m=U_m\gamma_m=15\times2.5\%=0.375\text{V}$$

显然，表①的精度等级高于表②，但因其量程较大，可能出现的最大绝对误差反而大于表②，所以用精度等级较低的表②测量 10V 左右的电压，测量误差反而较小。

由此例可见，选用测量仪表时，不能单纯追求精度等级，还要考虑到量程是否合适等因素。

（二）按性质对误差的分类

要对测量误差进行分析和处理，首先必须弄清楚误差是如何造成的。根据误差出现的原

因即误差的性质，可将测量误差分为三类。

1. 随机误差

在相同条件下，对同一被测量进行多次等精度测量时，由于各种随机因素（如温度、湿度、电源电压等时刻不停地在其平均值附近波动等）的影响，各次测量值之间存在一定差异，这种差异就是随机误差。

2. 粗大误差

在相同条件下，对同一被测量进行多次等精度测量时，有个别测量结果的误差远远大于规定条件下的预计值。这类误差一般是由于测量者粗心大意（如错读、错记、错算等）或测量仪表突然出现故障等造成的，故称之为粗大误差。

3. 系统误差

在相同条件下，对同一被测量进行多次等精度测量时，由于测量仪表不准确、测试方法不完善、或环境因素的影响等，造成各次测量值之间存在一定差异，但各次测量误差保持为常数或按一定规律变化。这种测量误差就称为系统误差。

下面对以上三种不同性质的误差分别进行讨论。

二、随机误差

（一）随机变量及其概率密度函数

测量中出现的随机误差是由大量相互独立的随机因素造成的，其中每一个因素所起的作用都很微弱。在测量时无法准确预测每一次测量的结果，而只能通过研究来估计每一次测量值落入某一区间的可能性（或者说概率）有多大。如果将测量值看做一个随机变量 X，那么它落入某一区间（x_1，x_2）的概率可表示为

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\} \tag{1-6}$$

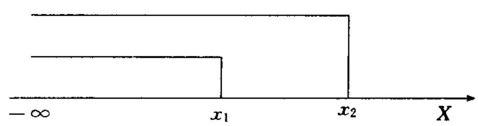

图 1-3 随机变量 X 的取值区间（x_1，x_2]

式（1-6）可结合图 1-3 来理解。因为区间（x_1，x_2）是任意的，所以要研究 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}$，只要研究 $P\{X\leqslant x\}(-\infty<x<+\infty)$就可以了。如果对于 $P\{X\leqslant x\}(-\infty<x<+\infty)$存在非负的函数 $f(x)$，使对于任意的实数 x 有

$$P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

则 $f(x)$ 称为随机变量 X 的概率密度函数。

（二）正态分布随机误差的性质

大量实验表明，测量过程中出现的随机误差一般符合正态分布，即具有如下性质。

1. 对称性

绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

2. 单峰性

绝对值大的误差出现的概率小，绝对值小的误差出现的概率大，而误差为零出现的概率最大。

3. 有界性

绝对值很大的误差出现的概率几乎为零。

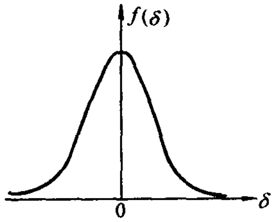

图 1-4 正态分布的概率密度函数

4. 抵偿性

在同一条件下，测量次数趋于无穷多时，全部误差的代数和趋于零。

设正态分布的随机变量 X 的误差为：$\delta=X-\mu$，μ 为被测量的真值，则随机误差 δ 的概率密度函数 $f(\delta)$ 如图 1-4 所示。

（三）正态分布随机变量的数字特征

随机变量的统计规律性由概率密度函数进行了全面的描述，而数字特征则通过一些简单的数据来反映随机变量的某些关键特征。

1. 算术平均值

由上述正态分布的抵偿性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}-\mu=0$$

所以

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\bar{x} \tag{1-8}$$

式中，$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ 为算术平均值。

式（1-8）表明，当等精度测量次数无穷增加时，被测量的真值就等于测量值的算术平均值，即算术平均值是被测量真值的最佳估计值。

2. 方差和标准偏差

在实际应用中，不仅要考虑如何由测量值来对被测量值的真值进行最佳估计，还应注意测量值偏离真值的程度。前一个问题通过算术平均值来解决，而后一个问题则由方差或由标准偏差来衡量。

方差就是当等精度测量次数无穷增加时，测量值与真值之差的平方和的算术平均值，用 σ^2 表示，即

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta^2}{n} \tag{1-9}$$

方差的正平方根称为标准偏差，用 σ 表示，即

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \tag{1-10}$$

符合正态分布的随机误差，其概率密度函数的数学表达式为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-11}$$

式中，$\delta=x-\mu$。

概率密度函数曲线的形状取决于 σ。首先，σ 是曲线上拐点的横坐标值。其次，σ 值越小，则分布曲线越陡，随机误差的分散程度越小，这是人们所希望的；σ 值越大，则分布曲

线越平坦，随机误差越分散。如图 1-5 所示。

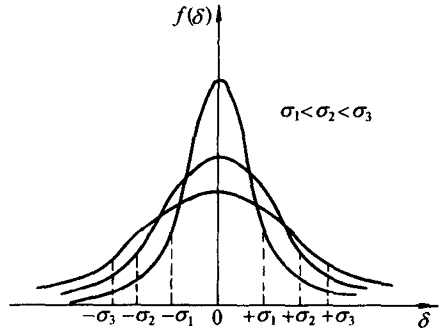

图 1-5 标准偏差 σ 的意义

若随机变量 X 具有形式为式（1-11）的概率密度函数，则称 X 服从参数为 μ、σ^2 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

利用式（1-10）计算标准偏差是在真值已知、且测量次数 $n\to\infty$ 的条件下定义的，在实际中无法使用。因此 σ 的精确值是无法得到的，只能求得其最佳估计值 $\hat{\sigma}$。

数理统计的研究表明，$\hat{\sigma}$ 可由如下的贝塞尔公式计算

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \tag{1-12}$$

式中，$v_i=x_i-\bar{x}$ 为第 i 次测量值的残差。

（四）置信区间与置信概率

被测量的测量值是一个随机变量 X，显然，随机误差 $\delta=X-\mu$ 也是一个随机变量，通常需要确定 δ 落入某一区间（a，b］的概率有多大。由式（1-6）、式（1-7）和式（1-11）可知

$$P\{a<\delta\leqslant b\}=\int_{-\infty}^{b}f(\delta)\mathrm{d}\delta-\int_{-\infty}^{a}f(\delta)\mathrm{d}\delta=\int_{a}^{b}f(\delta)\mathrm{d}\delta=\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta \tag{1-13}$$

随机变量 δ 的取值范围（a，b］称为置信区间，而随机变量在置信区间内取值的概率 $P\{a<\delta\leqslant b\}$ 则称为置信概率。由于概率密度函数 $f(\delta)$ 曲线具有对称性，并且其形状取决于 σ，所以置信区间一般以 σ 的倍数 $\pm k_p\sigma$ 表示，其中 k_p 称为置信系数。

在式（1-13）中，设 $\delta/\sigma=Z$，则置信概率可表示为

$$P\{-k_p\sigma<\delta\leqslant+k_p\sigma\}=\int_{-k_p}^{+k_p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{Z^2}{2}}\sigma\mathrm{d}Z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{k_p}\mathrm{e}^{-\frac{Z^2}{2}}\mathrm{d}Z \tag{1-14}$$

式（1-14）中的函数称为概率积分函数（或拉普拉斯函数），并将其表示为

$$\Phi(Z=k_p)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{k_p}\mathrm{e}^{-\frac{Z^2}{2}}\mathrm{d}Z \tag{1-15}$$

表 1-1 列出了置信系数 k_p 取不同值时 $\Phi(Z)$ 的数值。

表 1-1 正态分布下概率积分函数数值表

Z	$\Phi(Z)$	Z	$\Phi(Z)$	Z	$\Phi(Z)$	Z	$\Phi(Z)$
0	0.00000	0.9	0.63188	1.9	0.94257	2.7	0.99307
0.1	0.07966	1.0	0.68269	1.96	0.95000	2.8	0.99489
0.2	0.15852	1.1	0.72867	2.0	0.95450	2.9	0.99627
0.3	0.23585	1.2	0.76986	2.1	0.96427	3.0	0.99730
0.4	0.31084	1.3	0.80640	2.2	0.97219	3.5	0.999535
0.5	0.38293	1.4	0.83849	2.3	0.97855	4.0	0.999937
0.6	0.45149	1.5	0.86639	2.4	0.98361	4.5	0.999993
0.6745	0.50000	1.6	0.89040	2.5	0.98758	5.0	0.999999
0.7	0.51607	1.7	0.91087	2.58	0.99012	∞	1.000000
0.8	0.57629	1.8	0.92814	2.6	0.99068		

例如 $P\{-\sigma<\delta\leqslant+\sigma\}=\Phi(1)=0.68269$，说明随机误差落入区间$(-\sigma,+\sigma]$的概率为68.269%。

（五）仅包含随机误差测量结果的表达

算术平均值虽然是被测量真值的最佳估计值，但仍存在误差。如果把在相同条件下对同一被测量进行的等精度测量分为 m 组，每组重复进行 n 次测量，则各组测量值的算术平均值也不尽相同。数理统计学的研究表明，这种误差也符合随机误差的性质，并有如下定理：

若随机变量 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $\overline{X}\sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n})$。

显然，$\overline{X}$ 的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-16}$$

在实际中采用 $\sigma_{\bar{x}}$的最佳估计值 $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$，并且

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{1-17}$$

式中，$\hat{\sigma}$ 可由式（1-12）的贝塞尔公式求出。

设测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 相对被测量真值的误差为 $\delta_{\bar{x}}=\bar{x}-\mu$，则因为

$$P\{-\hat{\sigma}_{\bar{x}}<\delta_{\bar{x}}\leqslant+\hat{\sigma}_{\bar{x}}\}=P\{\bar{x}-\hat{\sigma}_{\bar{x}}\leqslant\mu<\bar{x}+\hat{\sigma}_{\bar{x}}\}=0.68269$$

即 μ 落入置信区间 $[\bar{x}-\hat{\sigma}_{\bar{x}},\ \bar{x}+\hat{\sigma}_{\bar{x}})$ 内的置信概率可达 68.269%，所以一般就将被测量 x 的测量结果表示为

$$x=\bar{x}\pm\hat{\sigma}_{\bar{x}} \tag{1-18}$$

三、粗大误差

当置信系数 k_p 取 3，即置信区间设定为 $(-3\sigma,\ +3\sigma]$ 时，相应的置信概率为

$$P\ \{-3\sigma<\delta\leqslant+3\sigma\}\ =\Phi(3)\ =0.99730$$

说明测量误差在 $(-3\sigma,\ +3\sigma]$ 范围内的概率达 99.73%，超出 $(-3\sigma,\ +3\sigma]$ 范围的概率仅为 0.27%，即一般情况下测量误差的绝对值大于 3σ 的可能性极小。因此，如果某次测量结果出现了这一小概率情况，就认为该测量结果存在粗大误差，应予以剔除，以消除其对测量结果的影响。

实际使用中常采用拉依达准则，即当测量次数足够多时，如果

$$|\ v_i\ |\ =\ |\ x_i-\bar{x}\ |\ >3\hat{\sigma} \tag{1-19}$$

那么第 i 次测量值 x_i 就存在粗大误差。

四、系统误差

已经知道，在相同条件下对同一个量进行的多次等精度测量中，如果仅存在随机误差，那么可用多次测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量真值 μ 的最佳估计，即认为 $\bar{x}$ 就是被测量的约定真值 x_0。这时某次测量值的绝对误差

$$\Delta x_i=x_i-x_0=x_i-\bar{x}=v_i \tag{1-20}$$

可见，如果仅存在随机误差，残差 v_i 就是该次测量的随机误差。但是，在许多测量中发现，$\bar{x}$ 与 x_0 之间存在明显的偏差，并且这种偏差常常保持为常数，或按某一确定的规律变化。显然，这是与随机误差性质不同的另一类误差。分析表明，造成这类误差的原因可能是测量仪