

小博士文库

古代数学趣谈

赵实 赵仲国

河北教育出版社

《小博士文库》序

亲爱的少年朋友们,我欣喜地向你们推荐一套课外优秀儿童读物——《小博士文库》。这套由河北教育出版社出版的文库,集百科知识与各项智能训练于一身,熔自然科学与社会科学于一炉,向你们展示了一个多彩的画面:有基础科学、科学史、新科技,也有未来科学、自然之谜和科学探险故事,还有动脑动手学科学;有文学欣赏、艺术研究、历史、地理、经济与法律知识,也有思想品德教育、心理素质培养,还有读写知识,体育常识,等等。

这套文库不仅内容广博,而且知识新颖,富有时代气息。更可贵的是它在智力、能力的培养提高方面所作的努力,使它与一般知识性丛书相比,具有独到之处。它将为你们的知识储备、智能开发,提供极好的条件。

我们应该感谢河北教育出版社为小读者准备了如此精美的精神食粮,我更希望各位少年朋友成为“小博士”,早日走上成功之路!

高占祥

1989年1月12日凌晨

序 言

建设一个强大的国家,离不开科学技术现代化,而科学技术现代化处处离不开数学。数学是打开科学大门的一把金钥匙,是攀登科学高峰的必备工具。

小学和中学数学课本的内容是数学的根基。有些少年朋友觉得它枯燥无味,深奥难学,却不知道数学有它迷人的魅力,吸引着古往今来的人们。许多科学家在少年时代就迷上了数学,受到数学的熏陶。

在古代数学中有许多中外名题,精彩有趣,构思巧妙、引人入胜。本书将它们之中的点点滴滴介绍给少年朋友们。全书共收集中外古代名题 40 余题。其中把一些很有趣的题介绍给小学高年级或初一年的同学,带有一定的尝试性,也有很大的困难。比如:《有趣的诡辩》是数学史上有名的阿基里斯和乌龟赛跑问题,它本质上是一个极限问题。作者将问题处于在一种结果比较直观的情况下,用了简单的手法来刻划极限的无穷过程。这样,降低了问题的难度,同时,使同学们对极限有了一面之交。

希望这本书能使同学们开阔眼界,增长知识,锻炼智力,激发起对数学的浓厚兴趣,唤起学数学爱数学的热情,培养出

探索科学奥秘的能力。也希望它能给少年朋友们带来愉快和收获。

邱佩璋

1990年7月1日于北京

目 录

中国部分	(1)
聪明的邻居	(1)
孙子剩余定理	(4)
神奇的幻方	(7)
巧算燕雀重量	(12)
折绳测量	(15)
河边洗碗算人数	(17)
量影便知高	(20)
织锦数匹话“归一”	(22)
百鹿进城	(24)
难坏了皇帝	(27)
韩信分油	(29)
好马与劣马	(32)
寒鸦落枯枝	(34)
试试你的学问	(36)
鳧雁同飞几时遇?	(38)
鸡兔同在一笼中	(40)
羊群的奥秘	(42)

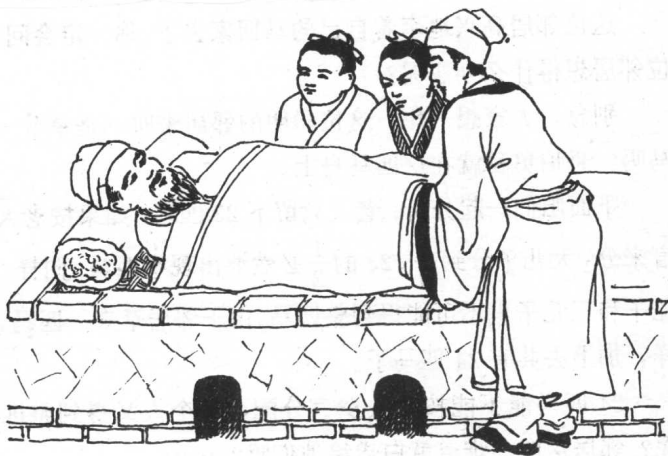
请你帮个忙	(45)
春游喝酒	(47)
千里马	(49)
愚蠢的“分钱求人”	(51)
论资排辈	(54)
《九章算术》中的盈不足	(56)
门和竹竿	(57)
蜗牛爬墙	(60)
剪羊毛求羊只	(62)
盘缠八子分	(64)
几时水流尽	(67)
五渠注水	(68)
织布能手	(70)
外国部分	(72)
墓碑上的秘密	(72)
分银子	(75)
捉大象	(79)
狗追兔子	(82)
马和骡驮包	(83)
渡河	(85)
遗产	(86)
有趣的诡辩	(88)
毕达哥拉斯数	(92)
兔子的繁殖	(94)

蜜蜂赏花	(98)
分牛	(102)
国际象棋发明人的报酬	(104)
摘苹果	(108)

中国部分

聪明的邻居

在很早很早以前，有一个4口之家：一位老人和他的三个儿子。不久，这位老人不幸得了重病，临终前，便把三个儿子叫到身边，决定把遗产分给他们。



老人说：“我劳累了一生，也没有什么贵重值钱的财产，仅落得 23 匹马，决定分给你们以了我的心事。”

遗产是这样分配的：大儿子得 $\frac{1}{2}$ ，二儿子分得 $\frac{1}{3}$ ，三儿子应得 $\frac{1}{8}$ 。没过几日，老人便离开了人间。

三个儿子料理完老人的后事，遵照老人遗言开始分马。但是，三个人合计了半天，怎么也分不出来。最后商议，只好决定把马杀死再分。正在这时，一位邻居牵着一匹马路过这里。当他得知情况后，劝他们先不要杀马。并答应想一想办法。

一会儿，这位邻居拍手说：“有了！”于是，他按老人的遗言把马分好了，三个儿子都非常满意，夸这位邻居聪明。

这位邻居高兴地牵着自己的马回家去了。你一定会问：这位邻居想得什么办法呢？

别急，大家想一想，这位聪明的邻居来时不是牵着一匹马吗？恐怕奥秘就在这匹马身上。

下面咱们一起分析：老人只留下 23 匹马，如果按老人遗言来分，大儿子分到 $\frac{1}{2}$ ，23 的 $\frac{1}{2}$ 必然要出现半匹马。同样，二儿子和三儿子也不可能得到整匹马。由于邻居牵来一匹马，这样，加上去共有 24 匹马了。

24 匹马能不能按老人遗言分配，每个人又得到整匹马呢？邻居这匹马难道就白送给他们吗？……

大家一定觉得很奇怪但又非常有意思吧。故事最后说：

“邻居牵着自己的马走了”。显然，他的马并没有送给这三个人。

“三个人都非常满意”，说明既符合老人的遗言，又都得到整匹马。

故事的趣奥就在这里。大家按老人的分配方案先计算一下： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{23}{24}$ 。结果不难看出，三个人最后分到 24 匹马中的 23 匹，并不是百分之百，也就是说，不是 24 匹马都分完。因此，邻居这匹马没有分。只是用它暂时充个数。

这又是什么原因呢？很简单。23 不能被 2、3 和 8 整除。24 才能被 2、3 和 8 整除。就是说按 24 匹马计算，大儿子可以得到： $24 \times \frac{1}{2} = 12$ （匹）；二儿子可以分得： $24 \times \frac{1}{3} = 8$ （匹）；三儿子能分到： $24 \times \frac{1}{8} = 3$ （匹）。这样，三个人共分到： $12 + 8 + 3 = 23$ （匹）。最后，余下的那匹马就是邻居自己牵来的了。

有人会问：“这位老人是不是故意难为三个儿子呢？”我看老人未必考虑那么多吧。大概连他自己也没想到，他的遗言竟为我们后人留下了一道“趣题”。

当然，按这位聪明的邻居分马的方法是否完全合理呢？是否符合老人生前的意愿呢？我看只要三个儿子都非常满意，咱们也不要揪死理了吧！

你们说对吗？

孙子剩余定理

要说“孙子兵法”，大家并不陌生，可能有的同学还会说上几段吧。要是问起《孙子算经》来，恐怕了解的同学就不那么多了。你们可曾知道，大约在1000多年前，我们的祖先“孙子”，就提出了许许多多有关数学方面的问题，而且还研究总结出不少解题方法。《孙子算经》就是其中一本著名的古代算书。这里既有风趣、繁杂的题目，也有比较通俗简便的算法。解答这些古算题，主要应弄明白题中的疑难文字和数量关系（当然有些也牵扯古制进率等）。

在《孙子算经》中，有这样一道题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这就是闻名于世的“中国剩余定理”，也叫“孙子剩余定理。”

乍一看，不知从何入手。先别着急，让我们先把题的意思译出来：有一堆东西不知有多少，若3个3个地数剩下2个，若5个5个地数剩下3个，若7个7个地数剩下2个。问这堆东西有多少？实际也可以理解为：一个数，除以3余2，除以5余3，除以7余2，求这个数。

文字障碍扫除了，意思也明白了，大家一定会说：“看来这个数一定是3、5、7三个数的最小公倍数”。我说你们只猜对一半，因为3、5、7的最小公倍数是105，它能被3、5、7三个数整除，可余数问题并没有解决。也许有人会说：“如果都余2就好办了，可偏偏除以5余3，这可不大好办了”。“余

数不一样”正是这道题的难点啊！

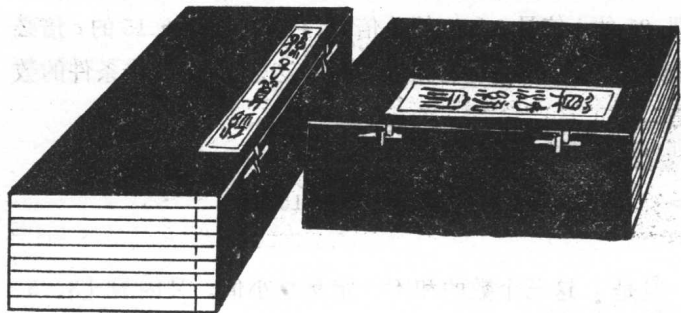
假如按大家的思路这样推算：先求出除以 3 余 2，除以 7 余 2 的数，符合这些条件的数是 3 和 7 的最小公倍数加上 2，即 $3 \times 7 + 2 = 23$ 。这样根据所得的“23”，再找“除以 5 余 3”的数。哈，太巧了！23 除以 5 正好商 4 余 3。因此，可以证明，符合条件最小数是 23。

当然，23 的 2 倍、3 倍……或者说 $105 + 23 = 128$ ， $210 + 23$ ，也就是说 105 的 2、3、4……倍加上 23，都一定符合条件要求。可见，这道题的答案有无数个。

后来，为防止出现哪种结果都对的多答案现象，统一要求求“最小”或“最少”了。说到这里，你一定会感到解这样的题太有意思了吧！

更有趣的是在《算法统宗》一书中，程大位将“孙子剩余定理”解法编成了歌谣：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆整月半，除百零五便得知”。

我们先来弄明白歌谣的意思吧：“除以 3 所得的余数用



70 去乘 (即 2×70)，除以 5 所得的余数用 21 去乘 (即 3×21)，除以 7 所得的余数用 15 去乘 (即 2×15)，然后将所得的三个数的和再减去 105 的倍数”。用算式表示是：

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233,$$

$$233 - 105 = 128,$$

$$128 - 105 = 23.$$

这样，23 就是所求数的最小值。

有的同学会问：“歌谣里为什么用 70、21、15 三个数分别去乘各自的余数呢？”这个问题提得好。

大家不是学过“数的整除”这部分知识吗。在除数是 3、5、7 一类题中，我们可以这样想：

$$[5, 7] = 35, 35 \text{ 除以 } 3 \text{ 余 } 2, 70 \text{ 除以 } 3 \text{ 余 } 1;$$

$$[3, 7] = 21, 21 \text{ 除以 } 5 \text{ 余 } 1;$$

$$[3, 5] = 15, 15 \text{ 除以 } 7 \text{ 余 } 1.$$

因此，70 的 a 倍不仅是 5 和 7 的公倍数，而且除以 3 余 a 。同理，21 的 b 倍是 3 和 7 的公倍数，它除以 5 余 b 。15 的 c 倍必定是 3 和 5 的公倍数，它除以 7 余 c 。这样，符合三个条件的数则是：

$$70a + 21b + 15c$$

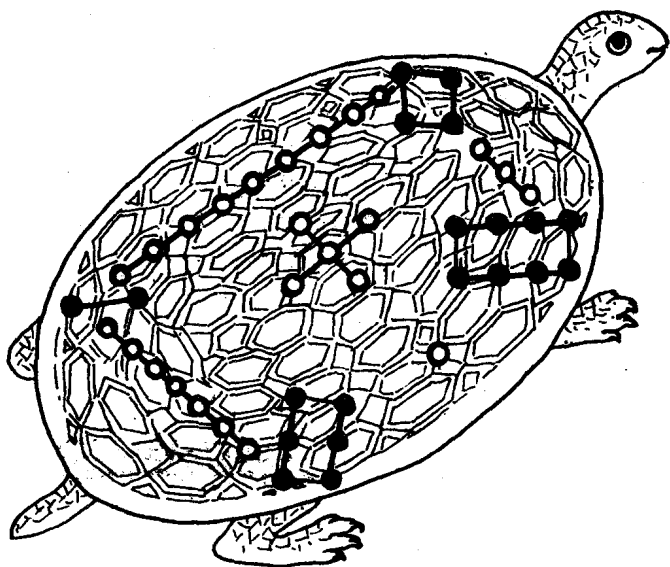
但是，这三个数的和不一定是最小值。又因为 $[3, 5,$

$7] = 105$ ，所以，再用三个数所得的和（指大于 105 的数）减去 105 的倍数。这也就是“歌谣”中出现 70、21、15 的原因。

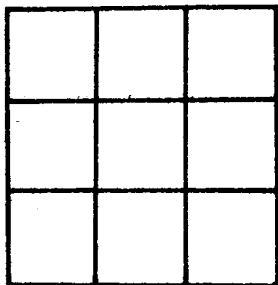
“孙子剩余定理”在世界数学史上颇负盛名，至今被国内外数学界延用，并成为我们少年儿童都很喜欢的趣题之一。

神奇的“幻方”

同学们，你们听说过我国古代有关“洛书”的神话传说吗？相传那是在夏禹时代，洛水中曾出现过一只神龟，背上有图也有文，后来人们称它为“洛书”（如下图）



实际“洛书”就是要求把 1—9 九个数，分别填入九个小方格内（如右图），使每横、竖行以及两斜行中的三格数字和都相等。

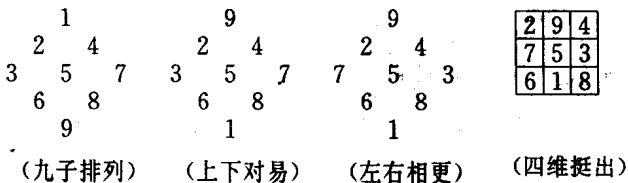


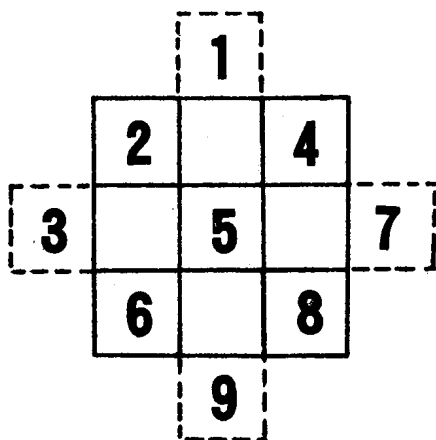
这种图形称作“幻方”。南宋时期，我国数学家杨辉将它起名为“纵横图”。在国外最早出现幻方的，是印度卡倍拉霍地方加泰苏立神庙碑文上的四阶纵横图。欧洲人到了 14 世纪才开始研究，比我国晚了近两千年呢！

“洛书”中所表示的幻方，由于是横竖各 3 行，所以，又称它为“三阶幻方”。既然有三阶幻方，必然也就有四阶幻方、五阶幻方……

幻方十分有趣，自古至今使不少爱好者入迷。下面咱们以洛书的三阶幻方为例说一说。

南宋我国数学家杨辉在《续古摘奇算法》中，总结洛书三阶幻方构造方法时，曾有这样一段话：“九子排列，上下对易，左右相更，四维挺出。”意思是什么呢？用语言不易说明白，我们用图示来解释一下它的意思（如下图）



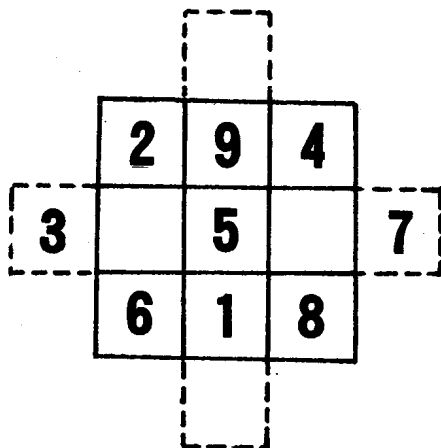


(A)

你们看，自南宋时期，我国古代数学家杨辉就以精练的语句，总结说明并填写出了三阶幻方的方法规律。

现在有些人，运用这一方法规律，作了更加直观形象的说明（如下图）：

图 A 实际上就是杨辉讲的“九子排列”。



(B)

你们仔细观察，图 B 实际不就是杨辉说的“上下对易”吗！（主要观察上下 1 和 9 的位置变化）

· 小博士文库 ·

主要观察图 C 中左右两边的 3 和 7 也交换了位置。这就是杨辉说的“左右相更”。当然，填好后，原来上下左右 4 个数字，分别与其余 5 个数字，都填在 9 个格中（每个数字占其中一格）。而且要求每一横、竖以及对角线的 3 个数字之和都是 15。

	2	9	4	
	7	5	3	
	6	1	8	

(C)

根据数学史家的考

证，三阶幻方最早见于公元前 500 年左右的春秋时期的《大戴礼记》中。汉朝徐岳把它称为“九宫算”，后来有人注解是：“九宫者，即二、四为肩，六、八为足，左三、右七，戴九、履一，五居其中。”这实际就是三阶幻方的填数方法。民间也流传着填写三阶幻方的歌诀：“四海三山八洞仙，九龙五子一枝莲，二七六朗赏月半，周围十五月团圆。”

虽然三阶幻方是最简单的幻方，但是后人又经过反复研究，又产生了不少的新填法。比如：用转动和映照（实际也就是镜像映射）等方法，则产生完全相同的幻方（如下图）

图（1）是我们填好的三阶幻方，如果把它转动 $\frac{1}{4}$ 圈，就得到了图（2）这种填法（按图（1）箭头所指方向转动）。