高中数学

专题辅导

第一册

北京西城区数学会
北京西城区教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导

第一册

北京市西城区数学会
北京市西城区教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导

第一册

北京市西城区数学会
北京市西城区教研中心

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：10.625　字数：224千
1987年4月第1版　　1987年4月第1次印刷
印数：1—82,000
统一书号：7243·334　　定价：1.60元

前　言

为了贯彻邓小平同志提出的教育要“三个面向”的指示精神，更多、更快、更好培养人材，近几年来，我们积极地在我区举办了高中学生数学课外小组专题辅导。实践证明，这些讲座的内容，对使学生掌握坚实的数学基础知识和基本技能、技巧，发展学生智力，培养学生创造性思维能力等方面，都能起到良好作用。

最近，由我学会李振纯、李林森、李松文等同志组织主讲人，将讲座资料加以系统整理，分成二十五个专题，每个专题大都先简要地复述教学大纲基本内容，然后围绕专题展开论述，对题目的解法侧重于探索思路和方法分析，并注意总结数学方法和解题规律。每个专题后面还都配有练习题及解答或提示供读者使用、参考。

参加本书编写工作的有：李振纯、李林森、李松文、欧阳东方、陈萃联、孙家钰、陈俊辉、孟令尧、蒋文蔚、田佣、方纯义、张自文、尹濬森、王世平、俞裕安、方珊、陈家骏、孙兰贵、刘崇俊、张春条、周观航等同志。

由于我们水平有限，缺点错误在所难免，迎迎读者批评指正。

北京市西城区数学会
北京市西城区教研中心

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　　录

第一讲　复　数

北京西城区教研中心　李松文

一、复数的概念

1．虚数单位i

（1）$i^2=-1$，i与实数在一起可按照运算律进行四则运算。

（2）i的乘方具有周期性　即$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。（$n\in N$）。

2．复数集C

$$\text{复数}\ (a+bi,\ a,b\in R)\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ \begin{pmatrix}a=0\\ b\neq 0\end{pmatrix}\\ \text{非纯虚数}\ \begin{pmatrix}a\neq 0\\ b\neq 0\end{pmatrix}\end{cases}\end{cases}$$

在复数$a+bi$中，a与b分别为其实部与虚部。

设a，b，c，$d\in R$。

（1）复数相等　$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c$，$b=d$。

（2）复数等于零　$a+bi=0\Longleftrightarrow a=0$，$b=0$。

（3）两个复数，如果全为实数，可以比较大小；如果不全为实数，不能比较大小。

3．复数的表示法

（1）代数形式　$z=a+bi(a,\ b\in R)$

（2）向量形式　$z=a+bi$用点$Z(a,\ b)$所对向量$\overrightarrow{OZ}$表示。

（3）三角形式　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

（4）指数形式　$z=re^{i\theta}$。

说明：（1）复数$z=a+bi(a,\ b\in R)$和复平面上的点$Z(a,\ b)$为一一对应，和向量$\overrightarrow{OZ}$为一一对应。

（2）$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r=\sqrt{a^2+b^2}$。

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}.$$

r叫做复数的模或绝对值，$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，表示原点O到点$Z(a,\ b)$的距离。当$b=0$时，$r=|a|$。θ为x轴的正方向到向量$\overrightarrow{OZ}$的角，叫做复数的幅角，适合$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角θ，叫做幅角的主值，记作$\theta=\arg z$。

4．共轭复数及其性质

复数$z=a+bi(a,b\in R)$的共轭复数$\overline{z}=a-bi$，z和$\overline{z}$互为共轭复数，所对应的点$Z(a,\ b)$和$\overline{Z}(a,\ -b)$关于x轴对称。

性质：$|\overline{z}|=|z|$，　$\overline{z}+z=2a$，$z-\overline{z}=2bi$，

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2.$$

说明：z^2和$|z|^2$是两个不同的概念，当$z \in R$时，$z^2 = |z|^2$；当$z \overline{\in} R$时，$z^2 \neq |z|^2$。

二、复数的运算

1．加减法

$$(a+bi) \pm (c+di)$$
$$= (a \pm c) + (c \pm d)i$$

向量表示如图1—1，

$$\overrightarrow{OZ}_1 + \overrightarrow{OZ}_2 = \overrightarrow{OZ}.$$
$$\overrightarrow{OZ}_1 - \overrightarrow{OZ}_2 = \overrightarrow{Z_2Z_1}$$

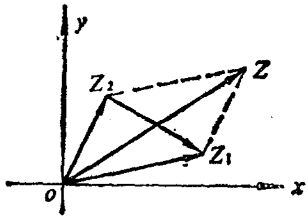

图1—1

2．乘法

$$(a+bi)(c+di)$$
$$= (ac-bd) + (bc+ad)i.$$
$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

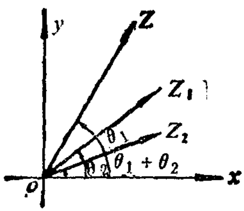

图1—2

几何意义：两个复数z_1和z_2相乘时，可先画出分别与z_1、z_2相对应的向量$\overrightarrow{OZ}_1$、$\overrightarrow{OZ}_2$，如果$\theta_2 > 0$把向量$\overrightarrow{OZ}_1$按逆时针方向旋转一个角θ_2；如果$\theta_2 < 0$，把向量$\overrightarrow{OZ}_1$按顺时针方向旋转一个角$|\theta_2|$，再把

z_1的模r_1扩大为原来的r_2倍，所得 $\overrightarrow{OZ}$就表示积$z_1 \cdot z_2$。如图1—2。

3. 除法

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad (c+di \neq 0)$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]。$$

4. 乘方（棣莫佛定理）

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \quad (n\in N)$。

对此定理要会用数学归纳法进行证明，并注意下列等式。

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{-n}=\frac{1}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta),$$

$[r(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$。

5. 开方

复数$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根有$n$个值，其值为

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)。$$

这n个值对应着复平面上的n个点，这些点均匀分布在以原点为圆心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上。

三、复数中的几个问题

在复习中要深入理解和灵活运用复数的概念和运算，为此可分为以下十个问题。

1．复数的代数形式和三角形式的互化

要注意三角形式的特点，不能认为含有三角函数就是三角形式。

例1　把下列复数化为三角形式：

(1) $2-2\sqrt{3}i$；

(2) $-3\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$；

(3) $\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{9\pi}{4}+i\sin\dfrac{9\pi}{4}\right)$。

解：(1)

$$\begin{aligned}&2-2\sqrt{3}i\\&=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&-3\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\\&=3\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

(3)

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

例2　求下列复数的模r和幅角主值θ，其中$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

（1）　$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$;

（2）　$\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}$;

（3）　$\left|\dfrac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}-i)\sqrt{5}i}\right|-2i$.

解：（1）原式$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$\because\quad \alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\quad \sin\frac{\alpha}{2}>0,\qquad 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$.

$\therefore \quad r=2\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \theta=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$。

（2） 原式 $=\dfrac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}$

$$=\frac{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}$$

$$=\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha)$$

$$=\cos(2\pi-2\alpha)+i\sin(2\pi-2\alpha).$$

$\because \quad 0<2(\pi-\alpha)<2\pi$。

$\therefore \quad r=1, \qquad \theta=2(\pi-\alpha)$。

（3） 原式 $=\dfrac{|3+4i|\cdot|\sqrt{2}-\sqrt{2}i|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|\cdot|\sqrt{3}-i|\cdot|\sqrt{5}i|}-2i$

$$=\frac{5\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\sqrt{5}}-2i$$

$$=\sqrt{5}-2i.$$

$r=\sqrt{5+4}=3; \qquad \cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3},$

又 $\sqrt{5}-2i$对应的点在第四象限，

$\therefore \quad \theta=2\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$。

说明：（1）对复数的和、差、积、商的模具有如下性质，在解题时要注意这些性质的运用。

$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|; \qquad |z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|;$

$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;$

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$。

（2）复数z的幅角主值$\arg z\in[0, 2\pi)$，在运用反三角函数表示$\arg z$时，一定要注意反三角函数主值的取值范围，在上面的（3）中，要避免将$\arg(\sqrt{5}-2i)$误认为是$\arc\cos\frac{\sqrt{5}}{3}$。但是$\arg(\sqrt{5}-2i)$的表达形式不是唯一的，由于$\sqrt{5}-2i$对应的点在第四象限，$\sin\theta=-\frac{2}{3}$，

$\operatorname{tg}\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$故$\arg(\sqrt{5}-2i)$也可以为$2\pi-\operatorname{arc}\sin\frac{2}{3}$，

$2\pi-\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$等形式。

2．复数和复平面上的点的对应

例1　已知$x=\sqrt{2a+1}+ai\left(a\in R，且a\geqslant-\frac{1}{2}\right)$，若$z=x-|x|+(1-i)$分别为实数，虚数，纯虚数，在第二象限时，求实数$a$的取值。

分析： 复数$z=a+bi(a, b\in R)$和复平面上的点$Z(a, b)$为一一对应，由a，b的取值（或$Z(a, b)$在复平面上的位置）来决定z为实数、虚数、所在象限。

由于$x=\sqrt{2a+1}+ai$，故有

$$
\begin{aligned}
z&=x-|x|+(1-i)\\
&=\sqrt{2a+1}+ai-|\sqrt{2a+1}+ai|+(1-i)\\
&=(\sqrt{2a+1}-a)+(a-1)i.
\end{aligned}
$$

（1）　当$a=1$时，z为实数，即$z=\sqrt{3}-1$；

（2）　当$a\neq1$时，z为虚数；

（3）　当$\sqrt{2a+1}-a=0$，时，z为纯虚数，即

$a = 1 \pm \sqrt{2}$时，$z = \pm\sqrt{2}i$；

（4）由 $\begin{cases}\sqrt{2a+1} - a < 0, \\ a - 1 > 0.\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a^2 - 2a - 1 > 0, \\ a > 1.\end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}, \\ a > 1.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 1 < a < 1 + \sqrt{2}.$$

∴ 当 $1 < a < 1 + \sqrt{2}$时，z在第二象限。

例2 m是什么实数时，复数$(m^2 - m - 2) + (2m^2 - 3m - 2)i$的幅角主值$\theta$为$\frac{5\pi}{4}$。

解：由已知可得，m的取值由下列不等式组来决定，即

$$\begin{cases}m^2 - m - 2 < 0, \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0, \\ m^2 - m - 2 = 2m^2 - 3m - 2.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}-1 < m < 2, \\ -\frac{1}{2} < m < 2, \\ m = 0, \ m = 2.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow m = 0,$$

∴ 当 $m = 0$时，复数 $z = -2 - 2i$的幅角主值为$\frac{5\pi}{4}$。

说明：复数$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$对应着点$P(r, \theta)$，这种对应不是一一对应，当且仅当 $0 \leqslant \theta < 2\pi$时，才是一一对应的。