经济应用数学基础

WEIJIFEN

微积分

谢明文 主编
陈小平 副主编

...GWEN ZHUBIAN CHEN XIAOPING FUZHUBIAN

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

经济应用数学基础

WEIJIFEN

微积分

谢明文 主编
陈小平 副主编

WEIJIFEN

E MINGWEN ZHUBIAN CHEN XIAOPING FUZHUBIAN

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础——微积分/谢明文主编 .—成都:西南财经大学出版社,2003.11

ISBN 7-81088-148-5

I.经… II.谢… III.经济数学—函授教育—教材 IV.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 064488 号

经济应用数学基础——微积分

谢明文 主编 陈小平 副主编

责任编辑:谢明志

封面设计:大涛视觉传播设计事务所

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.com/
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785 87352368
印　　刷:	西南财经大学印刷厂
开　　本:	890mm×1240mm 1/32
印　　张:	12.125
字　　数:	311 千字
版　　次:	2003 年 11 月第 1 版
印　　次:	2003 年 11 月第 1 次印刷
书　　号:	ISBN 7-81088-148-5/O·002
定　　价:	20.80 元

致读者的一封信

读者朋友们：

借此机会，我们想给大家谈一谈有关学习数学的方法问题．许多读者认为，学好数学的关键是天分．我们认为：天分，仅仅是学好数学的一个有利条件，而并非是一个必要条件．大量事实已经证明：学好数学的关键，不是天分、而是勤奋．天分再好，没有勤奋，难以得道；天分不好，笃信勤奋，反成正果．这种事情，古今中外，举不胜举．任何一个学生，无论其基础如何，只要勤奋读书、持之以恒，手脑并用、温故知新，就一定能够学好数学．

为了实现这个良好愿望，请读者一定要天天读书．每读一节，就必须读懂；读懂一节，就做一节的习题；遇有难题，回头再读；反复多次，必有所得；一章学完，综合练习必须完成．只要这样，你就一定能够学好数学、取得好的成绩、实现美好的夙愿．

有人认为，“学好数学的诀窍，就是大量做题”．这种观点，不完全正确．我们认为：在教材中的基本知识（定义、定理、公式、方法等）已经掌握的条件下，做题越多越好；多到一定程度，就会实现一种认识上的“飞跃”，使你获得比书上更广、更新的知识．但在教材中的基本知识（定义、定理、公式、方法等）根本没有掌握的情况下，做题越多就越糟糕．因为在错误思想的指导下，做题越多，错误观念越牢固，日后纠正，十分费劲．

因此，我们向读者建议：在精读教材、基本掌握教材内容的前提下，多做一些习题，这是有百益而无一害的．凡遇与答案不符的情况，必须认真检查，找出原因；若不能解决，则重读教材，直到问题解决为止．只要我们具有这样一种精神，就没有克服不了的困难，也没

有度不过的难关，更没有学不好的学生．

上述观点，实乃鄙见．真谛几何，尚需检验；错谬之处，还望海涵．

最后，预祝你们身体健康、学业成功！

编　者
2003年10月于成都

前　言

为了提高成人教育的质量，为广大专科学子就业、升学创造条件，我们受西南财经大学成人教育学院的委托，根据教育部颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》的最新要求和成人教育的未来发展，为广大函授、电大、夜大、职大及自考的专科学子编写了这本《经济数学基础——微积分》.

鉴于成教学生的实际情况，在编写这本教材之前，我们就提出了这样一个设想：按照《大纲》要求，结合学生实际，力求破除（纯数学的）传统观念，注重知识的实践性和科学性.

基于上述考虑，我们在编写本书时，力求使本书具有以下三个特点：

(1)可读性. 力求使绝大部分学生，觉得有东西可读，而且值得一读；在没有老师指导的前提下，能够读得懂书，做得起题. 以便使广大读者能够顺利完成自己的学业，增强升学的能力，获得就业的资本.

(2)科学性. 尽管本书采用了以实例引入基本概念、以几何说明代替理论证明的方法，但是它并没有失去数学本身的科学性. 从内容的深度上来看，它真正达到了大学专科的要求，实现了作者阐之有理、述之有据、深不露刺、俗不悖真的初衷.

(3)实践性. 本书的例题和习题，自始至终都遵循了由浅到深、层次分明、题型全面、分析细腻的原则，旨在通过这些措施，达到培养学生对问题的理解能力和分析能力，从而提高学生的解题能力的目的. 为此，本书在每节和每章的后面，分别配备了一定数量的练习和综合习题，以供学生学习时使用.

参加本书编写工作的有:谢明文(第一、二章)、代宏霞(第三、四章)、王新华(第五章)、陈小平(第六、七、八章)(以章节为序排名).

谢明文、陈小平同志分别担任本书的正、副主编,并负责全书的总纂和定稿工作.

西南财经大学成人教育学院和经济数学系有关领导的关心和支持,对于本书的顺利问世起了十分重要的作用.在此,编者表示诚挚的谢意.

由于时间仓促、水平有限,缺点错误,在所难免,敬请同仁、读者不吝赐教,我等必将感激至诚.

编　　者

2003年10月于成都

目　录

第一章　函数

函数是微积分的一个重要概念，也是现代数学研究的一个基本对象．在这一章中，我们将要介绍函数的基本概念和一些几何性质．

§1.1　预备知识

为了研究问题的方便，我们先来介绍在微积分的研讨过程中，经常都会遇到的几个基本术语和概念．

一、常量与变量

在研究或观察自然、社会和经济现象的过程中，经常都要涉及到各种各样的量．仅管它们杂乱纷繁，但是归结起来却只有两类：

(1)在研究或观察过程中，始终保持不变的量，如甲、乙两地的距离、地基坚实的楼房高度、匀速直线运动的速度、某个商店的某种商品在某一天的单价等，这种量称之为常量．

在数学上，人们常用英文字母 a,b,c 等来表示常量．

(2)在研究或观察过程中，不时发生变化(即可取不同值)的量，如行驶飞机上的存油量、一年中某商品的销售量、正在行驶的飞机和目的地的距离等，这种量称之为变量．

在数学上，人们常用英文字母 x,y,z 等来表示变量．

值得注意的是：(1)一个量究竟是常量还是变量，完全由研究或观察过程的具体条件所决定．同一个量，在这个过程中是常量，而在另一过程中却可能是变量．比如速度，在匀速运动中，它是常量；在匀加速运动中，它却是变量．

(2)常量与变量是相对的,它们在一定条件下是可以相互转化的．比如,物理学中的重力加速度,在小范围内它是常量,而在大范围内它却是变量;又如,一根铝制的筷子的长度,在某一小时或更短的时间范围内它是个常量,可是在一天或者一月、一年的时间范围内,它却是个变量,因为它的长度应随气温等因素而变化．

二、集合、区间与邻域

1．集合

集合是近代数学中的一个基本概念,也是集合论的主要研究对象．这个概念,自德国数学家康托尔(*G.Cantor*)于 1871 年创立以来,至今还没有一个正式的定义．下面,我们只给这个概念一个直观性的描述:

具有某种性质并可以彼此区别的事物的全体,称为一个集合或集．集合中的每一个事物,称为集合的元素．对于任何集合的元素,不仅是无序的,而且还是不重复的．

在习惯上,人们常用 $A,B,C,\cdots$表示集合,而用 $x,y,\cdots$或$(x,y),(x,y,z)$等表示集合的元素．

数学上,人们常用下面的方法来表示集合:

(1)列举法:在大括号$\{\quad\}$内,列出集合的全部元素,并在元素之间用逗号“,”隔开来描述集合．

例如,由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合A,可以表为:

$$A=\{a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_n\}.$$

(2)描述法:人们通常在大括号$\{\quad\}$内,左边写元素符号(x 或y 或(x,y)),右边列元素所满足的条件(简称满足条件 P_0),中间用竖线隔开来描述集合,即:

$$\{x\mid x \text{ 满足条件} P_0\} \text{ 或 } \{(x,y)\mid(x,y)\text{满足条件 } P_0\}.$$

例如,设 A 是方程$x^2+x=0$ 的全体实根所构成的集合,则用列举法与描述法,A 可分别表示为:

$$A=\{-1,\quad 0\}$$

与 $$A=\{x\mid x^2+x=0,\quad x\in R\}.$$

又如,满足方程 $x^2+y^2=1$ 的点所构成的集合 C,可表示为:

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\quad x,y\in R\}.$$

只有一个元素 a 的集合,称为单元素集合,记为 $\{a\}$.

不含任何元素的集合,称为空集合,简称空集,记为 ϕ. 例如

$$\{x\mid x^2+1=0,x\in R\}=\phi.$$

关于集合的概念,还必须注意以下三个问题:

(1)元素与集合的关系,只有属于"$\in$"或不属于"$\overline{\in}$"的关系.

若某个元素 x 属于集合 A,则应记为 $x\in A$.

(2)集合与集合的关系,只能有"相等"或"包含"的关系.

①对于两个集合 A 与 B,若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,即若 $\forall x\in A$[①],必有 $x\in B$,则称集合 A 是集合 B 的子集合,记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).

任何一个集合 A,都是它本身的一个子集合,即 $A\subseteq A$.

②若集合 A 与 B 互为子集合,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$ 或 $B=A$.

若 $A\subseteq B$,但 $A\neq B$,则称 A 为 B 的真子集合,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

数学上规定:空集合是任何集合的子集合.即对于任何一个集合 A,均有 $\phi\subseteq A$.

(3)集合作为数学的一个研究对象,也和其它研究对象(如有理数、实数等)一样,具有自己的一套运算规则.集合的运算规则很多,我们只介绍下面三种.

①若 A、B 是两个集合,则由 A、B 中的所有不同元素构成的集合,称为 A 和 B 的并集,记为 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

例如,若 $A=\{1,3,4,7\}$, $B=\{1,2,3,5,8\}$,则

---

① 记号 $\forall$,表示"对于一切"或"对于任意的". 下同.

$$A\cup B=\{1,3,4,7\}\cup\{1,2,3,5,8\}=\{1,2,3,4,5,7,8\}.$$

②若 A、B 是两个集合，则由 A 和 B 的全体公共元素所构成的集合，称为 A 与 B 交集，记为 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如，若 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$， $B=\{x\mid 2x^2-3x\leqslant 0\}$，则

$$A=\{x\mid -1<x<2\} \qquad B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\}$$

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}\\&=\{x\mid -1<x<2 \text{ 且 } 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\}\\&=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\}.\end{aligned}$$

③若 A、B 是两个集合，则由属于 A 但不属于 B 的元素(即从 A 中剔出属于 B 的元素后余下元素)所构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}.$$

例如，若 $A=\{1,2,5\}$， $B=\{5,6,7\}$，则

$$A-B=\{1,2,5\}-\{5,6,7\}=\{1,2\}.$$

例 1 求 $A=\{0,2,4\}$的子集合．

解 由子集合的定义知，集合：ϕ，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{0,2\}$，$\{0,4\}$，$\{2,4\}$，$\{0,2,4\}$均为 A 的子集合．

请大家注意：在写任何集合的子集合时，千万别漏掉空集和该集合本身！

在以后的学习过程中，我们所遇到的集合，在无特殊声明的情况下，均为元素是数的集合，简称数集．为了应用方便起见，我们记：全体正整数的集合为 N，全体整数的集合为 Z，全体有理数的集合为 Q，全体实数的集合为 R. 而且还把实数 a 与它在数轴上的对应点不加区别，即点 a 与实数 a 具有相同意义．

2. 区间

由于变量 x 的每一个取值都是一个数，因此变量 x 的全部可取

值就构成一个数集．这个数集，称之为 x 的变域(即变化范围)．

有的变量的变域，可用不等式来表示，如 x 的可取值为大于 0、小于 1 的一切实数，可表示成 $0<x<1$；有的变域，可用集合来表示，如 x 取不超过 5 的奇正整数，可用集合 $\{1,3,5\}$ 来表示．但是，在许多情况下，变量的变域还是以区间表示更为普遍．

定义 1.1 若 a、b 为实数，且 $a<b$，则称介于 a、b 之间的全体实数构成的集合 S 为以 a、b 为端点的一个区间．特别地，

(1)当集合 $S=\{x\mid a<x<b\}$ 时为开区间(见图 1-1(a))，记为 (a,b)．即

$$\{x\mid a<x<b\}\triangleq(a,b)^{①}.$$

(2)当集合 $S=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 时为闭区间(见图 1-1(b))，并记为 $[a,b]$．即

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}\triangleq[a,b].$$

(3)当集合 $S=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 时为左开、右闭区间(见图 1-1(c))，并记为 $(a,b]$．即

$$\{x\mid a<x\leqslant b\}\triangleq(a,b].$$

(4)当集合 $S=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 时为左闭、右开区间(见图 1-1(d))，并记为 $[a,b)$．即

$$\{x\mid a\leqslant x<b\}\triangleq[a,b).$$

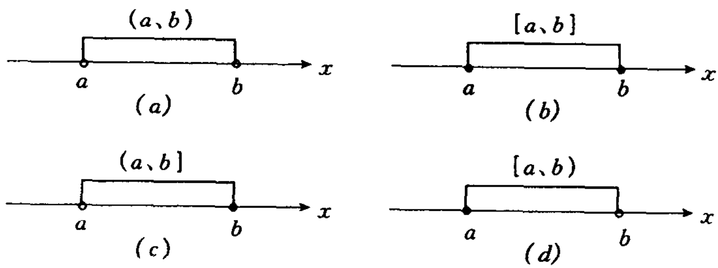

图 1-1

① 记号“$\triangleq$”表示“定义等于”或“记为”，下同．

以上区间称为有限区间．端点 b 与 a 的差 $b-a$，称为区间的长．

同理，当引入记号 $+\infty$（读成正无穷大）与 $-\infty$（读成负无穷大）时，可以得到下面定义：

$$\{x \mid a \leqslant x < +\infty\} \triangleq [a, \quad +\infty).$$

$$\{x \mid -\infty < x \leqslant b\} \triangleq (-\infty, \quad b].$$

$$\{x \mid a < x < +\infty\} \triangleq (a, \quad +\infty).$$

$$\{x \mid -\infty < x < b\} \triangleq (-\infty, \quad b).$$

$$\{x \mid -\infty < x < +\infty\} \triangleq (-\infty, \quad +\infty).$$

这五个区间，称为无限区间，其几何表示，如图 1－2 所示．

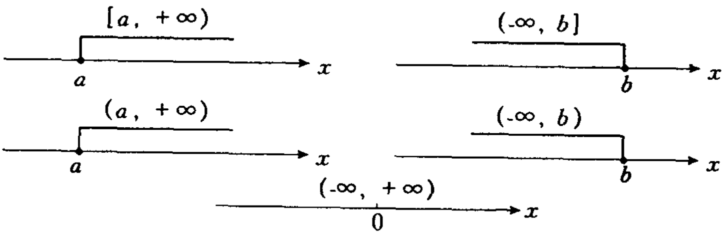

图 1－2

例 2 用区间表示下列不等式的解集合：

(1) $|x-2| \leqslant 1$；　　　　(2) $|2x+1| > 2$.

解 (1) $|x-2| \leqslant 1$ 的解集合为

$$\{x \mid |x-2| \leqslant 1\} = \{x \mid -1 \leqslant x-2 \leqslant 1\}.$$
$$= \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\} = [1, \quad 3].$$

(2) $|2x+1| > 2$ 的解集合为

$$\{x \mid |2x+1| > 2\} = \{x \mid 2x+1 < -2 \text{ 或 } 2x+1 > 2\}$$
$$= \left\{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$$
$$= (-\infty, \quad -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \quad +\infty).$$

例 3 用区间表示点集 $A = \{x \mid 0 < |x+2| < 2.\}$.

解 $A = \{x \mid |x+2| > 0 \text{ 且 } |x+2| < 2\}$

$$= \{x \mid x+2 \neq 0 \text{ 且 } -2 < x+2 < 2\}$$

$$=\{x \mid x \neq -2 \text{ 且 } -4 < x < 0\}$$
$$=(-4,\ -2) \cup (-2,\ 0).$$

3. 邻域

邻域也是一种区间．由于它是微积分的一个常用概念,一般区间无法取代它的作用,因此有必要对它进行专门地介绍．

所谓“点 a 的邻域”,实质上就是一个“以点 a 为中心的开区间”,并以 $U(a)$记之．

在数学上,常用的邻域有下面两种:

(1)若 a、δ 为实数且 $\delta>0$,则称开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域,并记为 $U(a,\delta)$. 即

$$\begin{aligned} U(a,\delta) &= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} \\ &= \{x \mid |x-a| < \delta\} \\ &= (a-\delta,\ a+\delta). \end{aligned}$$

其几何直观,如图 1－3 所示．

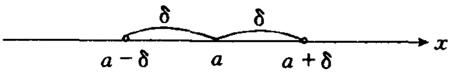

图 1－3

这种邻域,由于点 a 是邻域的中心点且在邻域内,因此亦称邻域 $U(a,\delta)$为点 a 的 δ 有心邻域．

(2)若 a、δ 为实数且 $\delta>0$,则称开区间$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$为点 a 的 δ 去心邻域,并记为 $\mathring{U}\ (a,\delta)$. 即

$$\begin{aligned} \mathring{U} &= \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} \\ &= \{x \mid x \in (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta)\} \\ &= (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta). \end{aligned}$$

其几何直观,如图 1－4 所示．