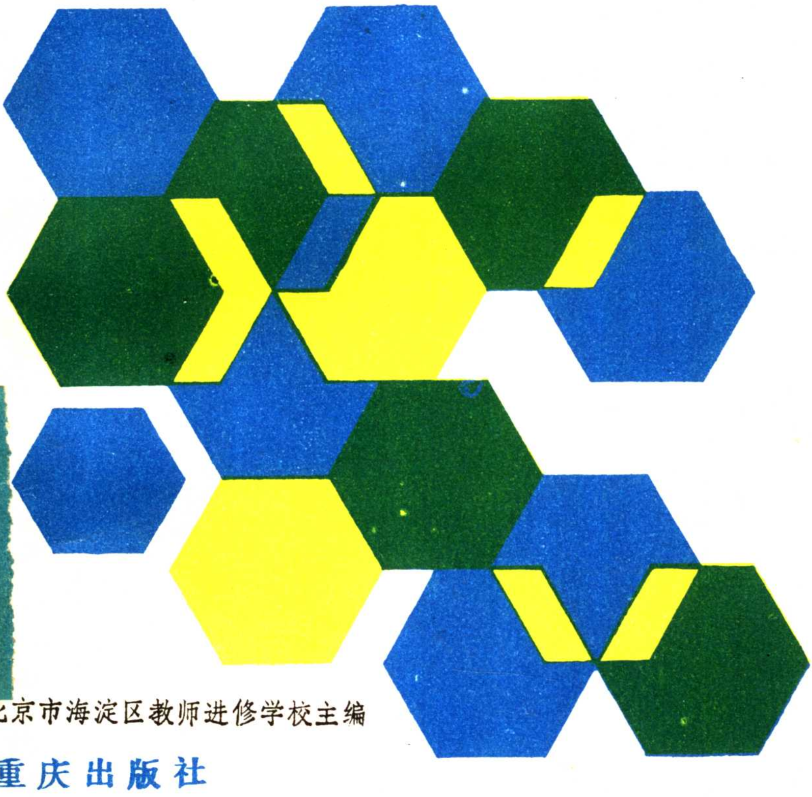
中学理科学习指导丛书

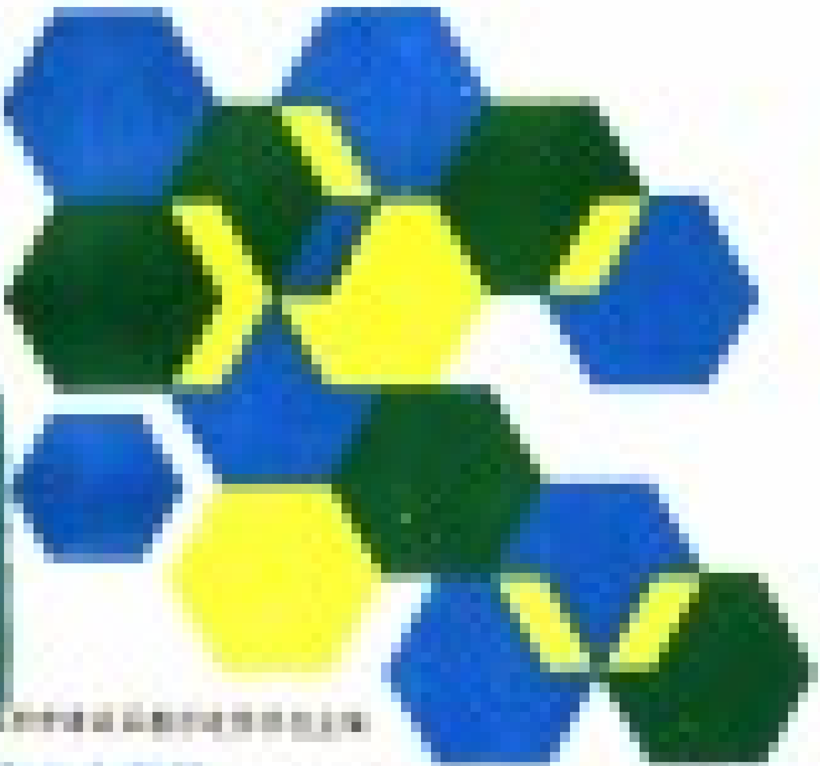
初三几何辅导与练习



北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

初三几何辅导与练习



中学理科学习指导丛书

初三几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八三年·重庆

编 者

北京大学附属中学 陆 乘
北京师院附属中学 邵元铭
北京市十一学校 王燕谋
北京市清河二中 耿楚吉
北京海淀教师进修学校 王增民 章昌宁
庄燕民 陈保民

初三几何辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川人民出版社重印
四川省新华书店发行
四川新华印刷厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张4.375 字数92千
1983年7月第一版 1983年7月成都第一次印刷
印数：1—895,000

书号：7114·124 定价：0.33 元

前　　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过教学实践，我们认识到：

(1) 只有把知识的结构分析清楚时，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体。

(2) 打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识中，重点和难点掌握不好，又是有些学生学习不好的原因之一。

(3) 引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识、提高解题能力的有效途径。

(4) 对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的。

(5) 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

（1）结构分析：有些章分析得较简单，可以在学习开始时看，有些分析得较深入，可以在学完全章后再看。

（2）重点和难点分析：对重点，说明了它们的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容。说明难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法，解题技巧和促进哪些能力的增长。

（3）各级题型：配以典型的例题，并说明其解题规律。

（4）启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法等，以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

（5）自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全，并具有一定综合性，用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与问题。

本书尽量做到体现以上各项要求，紧密配合教材，但又不重复教材内容。但是限于编者水平，未必都能做到。不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给以批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

1983年2月

目　　录

第五章 圆

一、结构分析

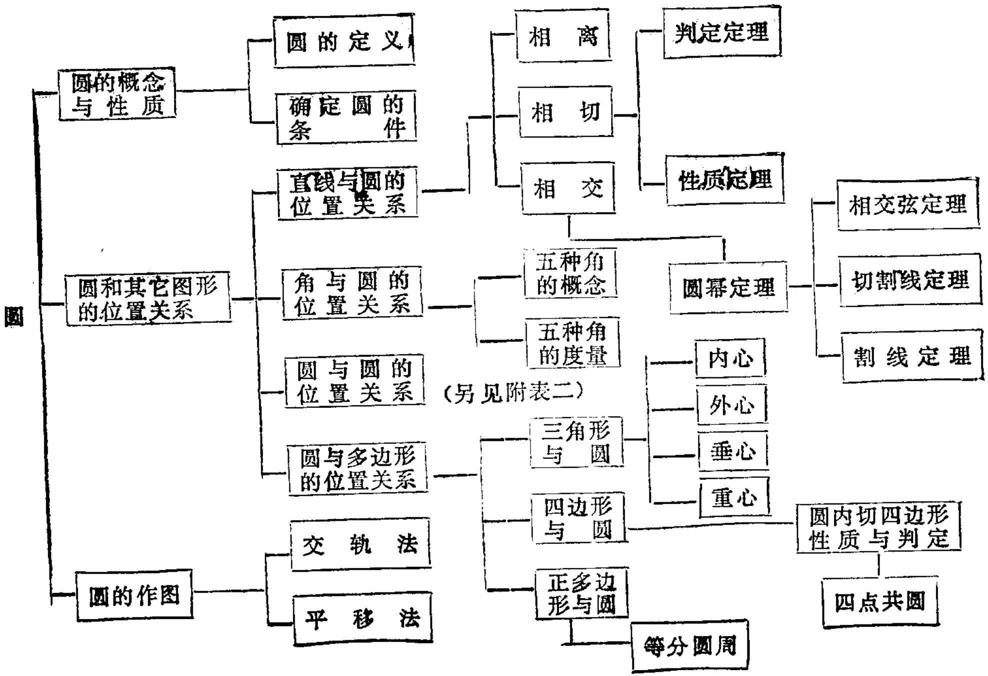
圆是大家常见的一种简单的封闭曲线．这章的主要内容有：圆的概念和基本性质；圆与圆和圆与其它图形——点、直线、角、三角形、四边形、正多边形的位置关系．这一章是平面几何的最后一章，它和前面四章直线形部分有很大区别，但是也有着十分密切的联系．圆这一章不论从理论上还是综合应用上都比前几章深，所以同学们学习这一章时就会碰到一定的困难．

这一章的重点是圆的基本性质和许多重要的定理，如垂径定理、圆周角度数定理、切线的判定与性质、圆幂定理、有关四点共圆的定理和一些计算公式，这些定理和公式都需要同学们很好地掌握，它们是证明一些基本问题的主要论据．另外，在圆这一章中还引进了一些证题方法，如反证法等，这些证题方法难度大、内容新，同学们一定要理解并掌握这几种证法的实质和步骤．这章的知识结构图见下页表．

二、重点、难点分析

1．圆的性质

圆的性质是学习全章知识的基础，这里必须搞清楚它的定义．我们在以前把圆看作是由平面上一线段绕其一端点旋


圆
圆的概念与性质
圆的定义
确定圆的条件
圆和其它图形的位置关系
直线与圆的位置关系
相离
相切
相交
判定定理
性质定理
圆幂定理
相交弦定理
切割线定理
割线定理
角与圆的位置关系
五种角的概念
五种角的度量
圆与圆的位置关系
(另见附表二)
圆与多边形的位置关系
三角形与圆
内心
外心
垂心
重心
四边形与圆
圆内切四边形性质与判定
四点共圆
正多边形与圆
等分圆周
圆的作图
交轨法
平移法

转一周，另一个端点所经过的封闭曲线．实际上这个圆是由无数条有公共端点的等长线段的另一端点所组成的图形．这样一些点、与平面上其余的点有什么本质的差异呢？这在当时是没有指出的．现在我们用近代数学的观点，从理论上对圆给予严格的定义，这对以后学习轨迹是十分有用的．圆是这样定义的："在平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合叫做圆"．从这个定义上讲，圆是点的集合，是到定点的距离等于定长的点的集合．关于"集合"是近代数学中极为重要的概念，这将在高一年级专门去研究．与此同时还须强调指出"同一平面"这一条件，如果去掉这个条件，那么到定点的距离等于定长的点的集合不是圆而成为球面了．从圆的定义不难推出：同圆半径相等；同圆直径相等．

另外，在圆的确定问题上，通过实验得出一个重要的定理，即圆的存在唯一性定理："过不在同一直线上的三个点可以作一个且只能作一个圆。"不可忽视"不在同一直线上"这个条件，这是存在的前提，否则圆就不存在了．而三个点又是作为唯一的保证，如果四点(除非四点共圆)和更多的点一般是不能做圆的．除了圆的存在唯一性外，它还有轴对称性和旋转不变性，利用它的轴对称性，可以论证垂经定理，利用它的旋转不变性又可论证圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，进而就可以研究圆心角度数定理和圆周角度数定理．

关于确定一个圆的条件，基本条件有两个：一个是圆心(定点)、一个是半径(定长)．前者确定圆的位置，后者确定圆的大小，这两个条件缺一不可．但把这两个条件改变一下形式，就会有下面几个确定圆的条件：

① 已知圆心和圆上的任意一点可以确定一个圆．

② 已知圆的一条直径可以确定一个圆.

③ 已知圆上的三个点可确定一个圆.

④ 已知圆的一条弦、以及弦的某一侧所对的圆周角或圆心角可确定一个圆.

掌握这些不同的确定圆的条件，将有利于对知识的灵活运用. 在这几条中，第③用的最广，最为常见. 过不在同一直线上的三个点作圆的作图问题，确保了任一个三角形都有一个外接圆，而且也明确了作三角形外接圆的方法.

(1) 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系.

根据圆的旋转不变性不难论证下面一些重要的定理:

① 等量关系有:

在同圆或等圆中

Ⅰ. 如果圆心角相等，那么所对的弧也相等；反之，如果弧相等，那么所对的圆心角也相等.

Ⅱ. 如果弧相等，那么所对的弦也相等；反之，如果弦相等、那么所对的劣(优)弧也相等.

Ⅲ. 如果弦相等，那么弦心距也相等；反之，如果弦心距相等，那么弦也相等.

② 不等量关系有:

在同圆或等圆中

Ⅰ. 如果圆心角不等，那么所对的弧也不等，圆心角大的所对的弧也大. 反之，如果弧不等，那么所对的圆心角也不等，大弧所对的圆心角也大。

Ⅱ. 如果两弧不等，那么所对的弦也不等. 大弧(劣弧)对大弦. 反之，大弦所对的劣弧也大.

Ⅲ. 如果弦不等，那么弦心距也不等，大弦则弦心距小，反之，如果弦心距不等，那么弦也不等，弦心距大则弦反而小.

学习上述定理时，需要注意以下几点：

(1) 所谓"等弧"是指在同圆或等圆中能够重合的弧，换句话说，只有在同圆或等圆中才能比较弧的相等与不等。

(2) 搞清楚上述定理的大前提、小前提和结论。

对于上面这些定理我们不逐一去证，只就其中一二予以证明，其余的留给同学们去证。

定理：在同圆或等圆中，对两条不相等的弦，大弦的弦心距较小。

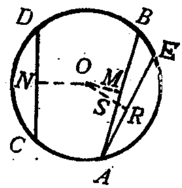


图 5-1

已知：如图5-1在⊙o中，弦$AB>$弦CD，$OM\perp AB$，$ON\perp CD$。

求证：$OM<ON$。

证明：在$\overset{\frown}{AB}$上截取$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$。则$AE=DC$。

作$OR\perp AE$于R，并交AB于S，

则$OR=ON$，但在直角三角形OSM中，

$OS>OM$。

但 $OS<OR$，

$\therefore$ $OM<OR$， $\therefore OM<ON$。

定理：在同圆或等圆中、对两条不相等的弦，弦心距较小的弦较大。

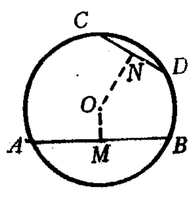


图 5-2

已知：(如图5-2.) AB和CD是⊙o中的两条弦，又$OM\perp AB$ $ON\perp CD$，且$OM<ON$。

求证：$AB>CD$。

证明：(用反证法)

弦AB和CD之间只能是三种情况之一：

$AB=CD$，$AB<CD$，$AB>CD$.

假设　$AB \not> CD$.

如果$AB=CD$就有$OM=ON$这与已知$OM<ON$矛盾，如果$AB<CD$就有$OM>ON$这与已知$OM<ON$也矛盾，所以只有$AB>CD$成立.

反证法是一种很重要的证明方法，它的实质是："驳倒欲证结论的反面，从而反衬出结论的正确"。它的一般步骤分为四步：假设结论的反面成立；推出新结论；找出矛盾；驳倒欲证结论的反面即结论正确.

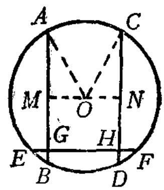


图　5-3

例：如图5-3．已知AB和CD是两条互相平行且相等的弦、EF垂直于这两条弦、且分别与AB、CD相交于G、H.

求证：$AG=CH$.

证明：过O点作$MN \parallel EF$交AB、CD于M、N.

$\because$　$EF \perp AB$，$EF \perp CD$．$\therefore OM \perp AB$，$ON \perp CD$.

$\therefore$　$MGHN$为矩形，则　$MG=NH$．连OA、OC.

$\because$　$OA=OC$，$OM=ON$，$\therefore Rt\triangle OAM \cong Rt\triangle OCN$

$\therefore AM=CN$．$\therefore AG=CH$.

例：求证：圆的直径是最大的弦.

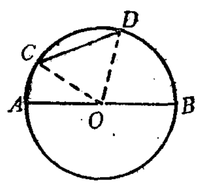


图　5-4

已知：如图5-4．$\odot o$中AB是直径，CD是不通过圆心的任意弦.

求证：$AB>CD$.

证明：

连OC，OD. ∵CD为不过圆心的任意弦，

∴一定可以作出一个$\triangle OCD$. 在$\triangle OCD$中，$OC+OD>CD$(三角形两边之和大于第三边)

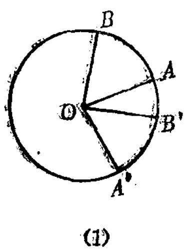
但$OC+OD=AB$，∴$AB>CD$.

（2）和圆有关的角.

和圆有关的角有五种，它们是圆心角、圆周角、圆内角、圆外角和弦切角。在这五种角中，以圆心角定理为基本的角与弧的度量关系，其它四种角与弧的度量关系都是由它推出来的。所以在学习其它四种角与弧的度量关系时，都可以转化到圆心角上去研究。

圆心角度数定理讲的是圆心角的度数等于它所对弧的度数. 这里须要搞清楚：①角与弧的度数相等而绝不是角与弧相等，有时会出现$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}$的错误，正确的写法是$\angle AOB\overset{m}{=}\overset{\frown}{AB}$. ②相等的弧和相同度数的弧的意义也是不同的.

如图 5-5 (1)中$\overset{\frown}{A'B'}$和$\overset{\frown}{AB}$是相等的弧，也是相同度数的弧。图 5-5 (2)中$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$是相同的度数的弧，但不是相等的弧.



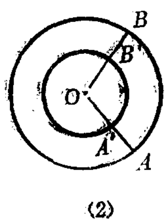


图 5-5

例：已知$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$．$M$、$N$各是半径$OA$、$OB$的中点．

求证：$MC=NC$．（图5-6）

证明：∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，

∴ $\angle AOC=\angle BOC$．

又M、N各为半径的中点，

∴ $OM=ON$（等量之半相等），又∵$OC=OC$，

∴$\triangle MOC\cong\triangle NOC$．

∴ $MC=NC$．

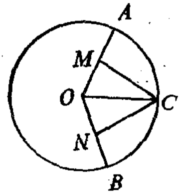


图 5-6

关于圆周角这一重要概念，为了加深对它的理解，可从图 5-7 直观地看一看它们是不是圆周角，从而就可以得出圆周角的基本特征有两点：(1)顶点在圆周上；(2)角的两边都与圆相交．

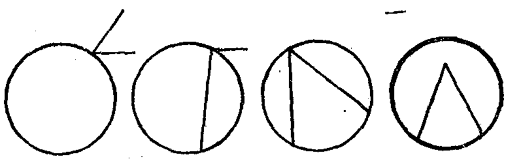


图 5-7

此外，在证明圆周角度数定理时用到了圆心角度数定理，它们是怎样转化的？转化的条件是什么？辅助线是怎样添加的？为什么要分成三种情况来讨论？而这三种情况中又以那一种为最重要？这些问题的提出，会有助于提高分析问题和解决问题的能力．例如，有一圆内接四边形$ABCD$，对角线AC，BD把它的四个角分成为八个角（图5-8），你能找出这八个角中四对相等的角吗？试找找看．

圆周角度数定理的证明在教科书上用了三种情况分别给予证明的，其中第二种和第三种情况都是利用第一种情况证明的，这样就将这三种情况统一到第一种情况，得出第一种已得出的结论来．将几种情况归纳成一般结论的证明方法叫枚举归纳法．枚举归纳法证明的要点是："把已知的图形之间的相关位置分类，先证其特殊位置的，得到特殊位置的结论后再证明其它非特殊位置的，最后归纳成一般的结论"．即由特殊到一般的证明方法．

圆周角度数定理的证明及它的几个推论务必要熟记，它

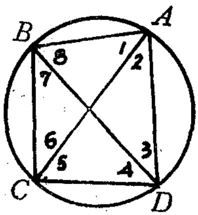


图 5-8

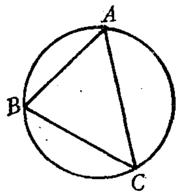


图 5-9

的用途极其广泛．

例：（如图 5-9）$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{BC}$的度数分别为 $70°$和 $120°$，求$\triangle ABC$的三内角的度数．

解：$\because$ 一个整圆的度数是$360°$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{CA}$的度数 $=360°-(70°+120°)=170°$．

因此．得到

$$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}=\frac{1}{2}\times 120°=60°；$$

$$\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\text{的度数}=\frac{1}{2}\times 170°=85°；$$