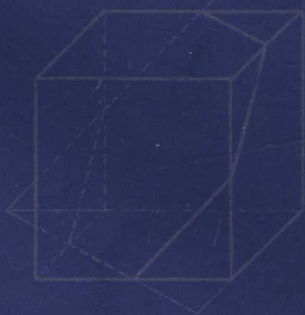
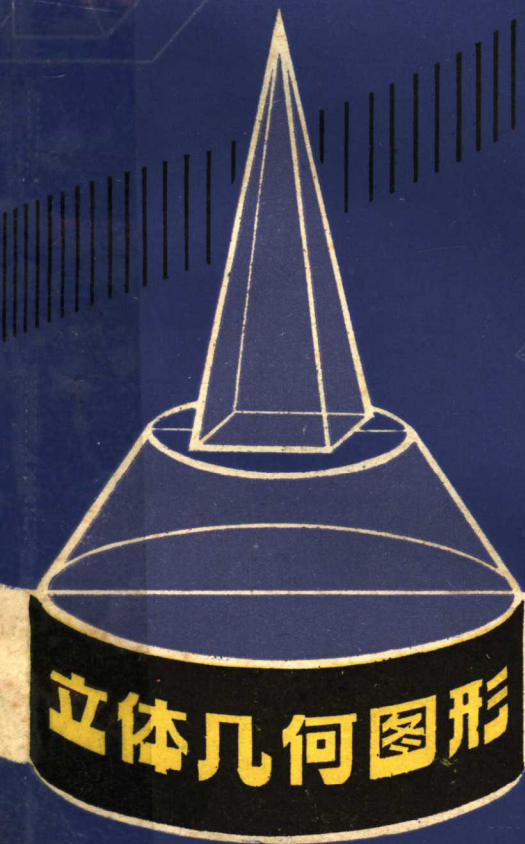
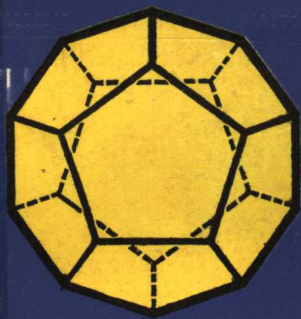




金 品 编著

立体几何图形 描绘技法

江苏人民出版社

立体几何图形描绘技法

金 品

江苏人民出版社

出版者的话

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。中学立体几何是培养青年学生形成空间观念，具有空间想象力和解决实际问题能力的重要课程。在立体几何教学中，培养学生描绘立体几何图形的能力，具有它特殊的意义。当前，有不少中学生缺乏空间想象能力和绘画立体几何图形的基本知识，无法画出直观、准确、简易的立体几何图形，致使解题发生困难，甚至造成错误。一部分中学数学教师也缺少必要的知识和技能，常常因学生不会画图造成错图、错题而烦恼。因此，正确有效地描绘立体几何图形，一直是中学立体几何教学中教与学两个方面的突出问题之一。

金品同志是我省著名的几何教师，毕生从事几何学的教学和研究，在立体几何图形描绘方面，也有很多心得体会，积累了不少经验。这本《立体几何图形描绘技法》就是江苏师范学院数学系根据金品同志生前的手稿整理而成的。全书共七章二十二小节，另加两个附录。主要就中学立体几何图形描绘的目的要求，各类图形的基本画法、原理及其修饰加工等问题作系统全面，由浅入深，深入浅出的阐述。最后专章“范例”，环绕立体几何典型例题题解，向读者显示描绘直观、准确、简易的立体几何图形在培养学生空间观念和解题能力中的实际意义。

过去，有关立体几何图形描绘技法方面的文章在数学刊

物上亦有少量发表，但以专册出版国内尚属少见。我们殷切期望它的出版能对中学立体几何的教学有所裨益。由于种种原因，本书难免有不足和错误之处，敬请读者批评指正。

一九八一年八月

前 言

金品同志是我系的一位老教师，长期从事几何学的教学和研究工作，特别对初等几何具有丰富的教学经验和较深的造诣，在中学数学界有一定的影响和声望。金品同志在一九七八年七月不幸逝世，留下部分遗著遗稿。为了总结金品老师在几何教学和研究方面的成果，我们从他的遗稿中整理了《立体几何图形描绘技法》一书。供中学数学界参考。

由于整理工作的不仔细，书中难免有些差错，望读者指正和谅解。

江苏师范学院数学系

一九八一年一月

目 录

第一章	画立体几何图形的目的和要求 ·····	(1)
第二章	基本元素和基本关系的表示法 ·····	(10)
§ 1	基本元素的表示法·····	(10)
§ 2	基本关系的表示法·····	(13)
第三章	平面图形的画法 ·····	(27)
§ 1	画水平位置和铅垂位置的平面图形·····	(27)
§ 2	二面角的画法·····	(39)
§ 3	二视图和三视图的画法·····	(44)
第四章	多面体的轮廓线的画法 ·····	(53)
§ 1	棱柱、棱锥和棱台的画法·····	(53)
§ 2	正方体的画法·····	(59)
§ 3	正八面体的画法·····	(69)
§ 4	正四面体的画法·····	(72)
§ 5	正十二面体的画法·····	(74)
§ 6	正二十面体的画法·····	(77)
§ 7	球面的轴测画法·····	(79)
第五章	较复杂图形的画法 ·····	(89)
§ 1	引言·····	(89)
§ 2	怎样画平行平面或垂直平面·····	(93)
§ 3	怎样画出直线和平面的交点·····	(93)
§ 4	怎样画出两相交平面的交线·····	(99)

§ 5	怎样画截面	(104)
§ 6	画展开图	(119)
第六章	图形的加工	(125)
§ 1	图形的简化	(125)
§ 2	画辅助图形	(127)
§ 3	图形的加工或修饰	(133)
§ 4	寻求直观性较强的图形	(136)
第七章	范 例	(142)
附录	I. 正十二面体的补充证明	(157)
	II. 正二十面体的补充证明	(159)

第一章 画立体几何图形的目的和要求

所谓画立体几何图形就是在平面上画空间的图形。大家知道，平面几何图形的所有元素都在同一平面内，所以可以在一个平面内（纸面或黑板上）使用作图工具作出正确的平面几何图形。但是在立体几何中，图形的所有元素不完全在同一平面内，而且还增加了一个新元素“平面”，所以，要在平面上画出立体几何图形，并使它能够比较正确地反映出立体各部分的尺寸和元素间的关系，有一定的困难。这就有必要来研究如何画立体几何图形。

立体几何教学的主要目的是要形成学生的空间观念，培养学生的空间想象力，并使学生能掌握空间图形的一些重要性质。但是抽象的空间观念必须通过对具体实物的观察和研究，才能逐步建立起来，因而，利用实物和模型的直观教学在立体几何教学中具有一定的作用。这是因为实物和模型具有直观和准确两个特点，通过对实物和模型的观察，容易发现各元素间的关系。

一个人不管具有多大的想象力，当他碰到复杂的几何问题时，单凭空想是解决不了问题的。例如，要想作一平面截正方体，使所得的截面成为一个正六边形时，我们不妨先用硬纸板做成正方体。把装有红墨水的水盆的水平面看作想要作的平面。把正方体模型浸入红墨水中，再取出就模型进行

观察，这样就容易发现问题是否可能以及如何截法。

另一方面我们必须注意到，使用实物和模型的目的在于通过它们建立起抽象的空间观念，逐步培养学生对空间的想象力和熟悉立体几何图形的基本性质。如果使用实物和模型的次数过多，容易使学生养成依赖模型来解决问题的习惯。这是有碍于空间观念的建立和空间想象力的提高的。事实上，要想处处借助实物和模型也是不可能的。因为几何问题是多种多样的，几何体也是多种多样的，不可能都用实物和模型表示出来。

要解决这个矛盾，就必须在平面上画出立体几何图形，并利用这种图形来逐步代替实物和模型。尽管立体几何图形的直观性和准确性要比实物和模型差一些，但是它能起到与模型同样的功效。特别是当我们掌握了描绘立体几何图形的基本方法和技巧后，就能进一步研究立体几何图形的比较复杂的性质，逐步深入立体几何理论的学习。这就是研究立体几何图形描绘的目的。

我们知道，一个画得正确的平面几何图形对解题有很大的帮助，解法常可由图中探索而得。反之，一个不正确的图形往往导致错误的结果。而空间图形的正确描绘，在解立体几何题目时更显得重要。然而学生往往不注意这一点。下面是三个典型的图形画得不正确的例子。

图1是一个四棱台。然而它的四条侧棱不交于一点。图2是截去一个角的四棱锥，然而 AB ， DC 的交点 K 不在侧棱 SF 上。

第三个例子是：很多学生把通过正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的一个底边 AB 和上下底中心连线 OO_1 的中点 M 所

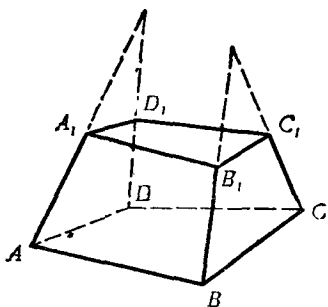


图 1

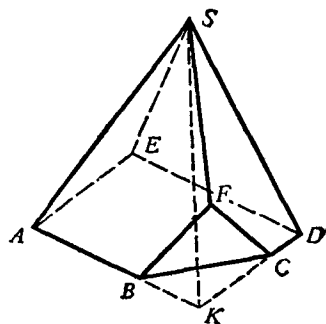


图 2

作的截面，画成三角形 ABC_1 （图 3），因而计算错了这个截面的面积。

当然，如果空间观念比较清楚，那就不会发生这些错误。因为按照棱台的定义，图 1 中的四条侧棱必须交于一点。在图 2 中， AB ， DC 的交点 K 也是平面 SAB 和平面 SCD 的公共点，因而必须在侧棱 SF 上。

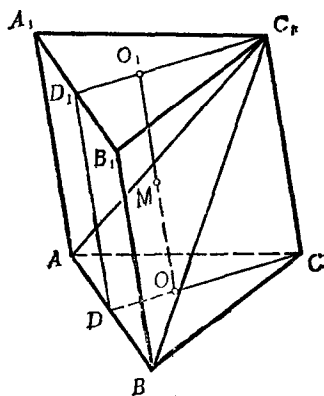


图 3

在第三个例子里面，通过 AB 和 M 的截面决不是平面 ABC_1 。因为假设 M 点在截面 ABC_1 上，但已知 M 点在 OO_1 上，因而也在平面 C_1D 上，因此 M 点在平面 C_1D 和平面 ABC_1 的交线 C_1D 上。于是， $\frac{MC_1}{DM} = \frac{OC}{OD} = \frac{2}{1}$ ，设 OD

$= x$, $OM = O_1M = h$, 则 $OC = 2x$, $DM = \sqrt{x^2 + h^2}$,
 $MC_1 = \sqrt{4x^2 + h^2}$ 。这样一来, $\frac{MC_1}{DM}$ 显然不可能等于 $\frac{2}{1}$ 。

故假设M点在截面 ABC_1 上是错误的。通过AB和M的截面决不是 $\triangle ABC_1$ 而应该是等腰梯形。(图4)

从上面这些例子看来, 在平面上画出空间图形需要有一定的几何知识和一定的空间观念, 否则难免会发生错误。反过来, 在平面上画出空间图形的能力的提高, 也有助于学生进一步掌握立体几何知识和建立空间观念。这就是为什么要研究立体几何图形描绘的另一个目的。

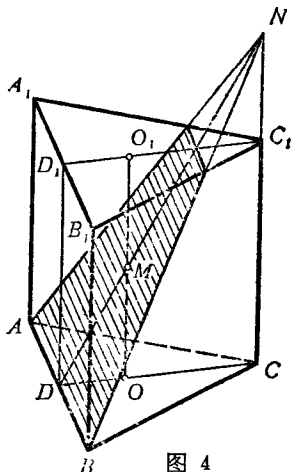


图 4

画立体几何图形的目的既如上述, 那么对于在平面上画立体几何图形应当提出什么要求呢? 要求很明确, 就是所画图形必须具有(1)直观性、(2)准确性、(3)简易性。也就是要使所画图形看起来能够产生立体的感觉; 使所画图形能清晰、准确地反映各元素之间的相互位置关系以及某些元素之间的度量关系; 而且画图的方法又比较简单。

要完全满足这些要求是困难的。但可以根据立体几何问题的要求, 分清主次, 使所画图形的某些部分保持直观和准确, 从而有助于解题。这样, 所画图形与实物或模型相比, 虽然直观性和准确性稍差, 却取得了简易性。因为画一个立

体几何图形比制造模型毕竟要容易得多。

以上讲的是在平面上画立体几何图形的要求。在不同的科学技术部门，对于在平面上画空间图形的要求各有不同，因而也就产生了各种不同的方法。以地理学为例，画普通地图等于把球面上的图形画成平面图形。为了适应各种不同的目的，有把经纬线画成长方格的方法；有把经纬线画成曲线的方法；也有把经线画成直线而把纬线画成曲线的方法。在画南北极圈地图时还有把纬线画成圆的方法。我们可以用不同的方法来达到各种不同的要求。

要正确地描绘空间图形，一般采用下面三种方法：（1）蒙日（Monge）正投影法、（2）轴测法、（3）透视法。

在机械制图中，通常采用蒙日正投影法。所谓蒙日正投影法就是把空间图形向两个互相垂直的平面作垂直投影。这时所作的图形保持图形中某些基本元素的原来形状和大小，但图形被割裂了，不容易从这个投影图中了解原物的整体形状。

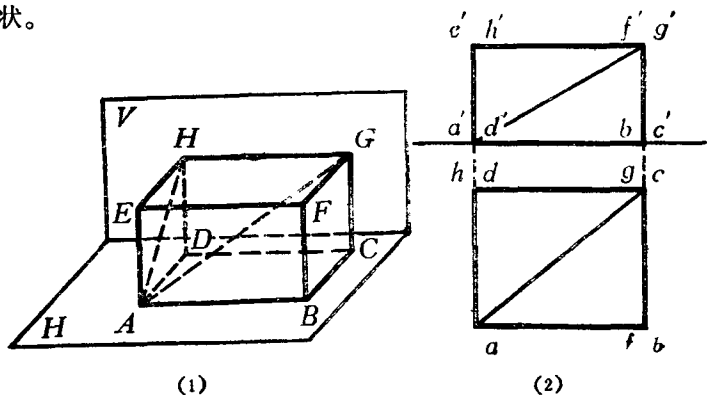


图 5

例如把长方体向它的两个面的平行平面作正投影时，就得到图5（2）的二视图（制图学中叫做前视投影图和水平投影图）。从这个二视图中，可以知道原长方体的长、宽和高，因而长方体的形状也就决定了。但我们不能直接知道对角线AG的实长，也不能看到AH和CF是异面直线这个关系。

又如对于长方体挖去一个四分之一圆柱后所得的立体ABCFED，它的两个投影图和长方体的投影图一样。虽然我们还可以通过增加一个侧面投影图，利用它们的侧面投影图的不同来弥补这个缺点。（图6）但要想从这三个投影图来了解立体的整体形状是比较困难的。正因为蒙日正投影法的直观性较差，所以在立体几何中一般不采用这个方法来描绘立体图形。

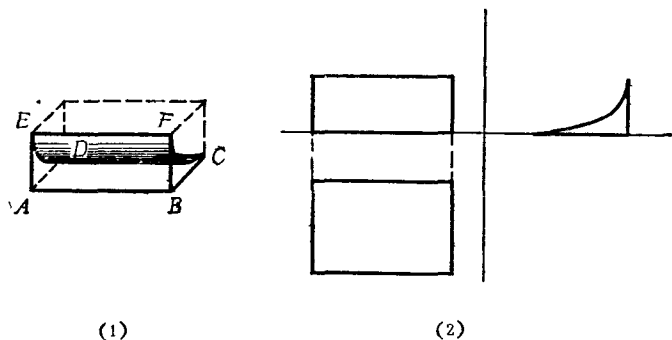


图 6

轴测法是根据“用平行投影把空间图形投射到一个平面上”的方法而建立起来的。利用轴测法画出的图形能给人以总的图象，看起来比较象原物，因此直观性较强。（例如图

7 中 AH , CF 的异面直线关系, 以及 AG 和 AC 、 DG 的相交关系看得很明显。)

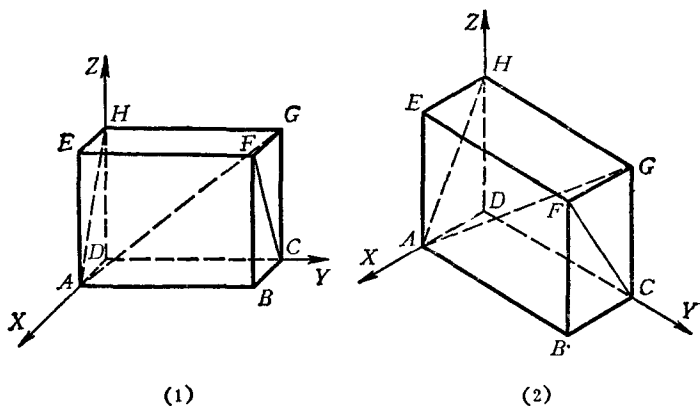


图 7

上面所画的都是一个长方体的轴测投影图, 仅是由于投影方向不同而已。当然还可以改变投影方向而得到其它的轴测投影图。这些投影图由于直观性较强, 有时还把它叫做直观图。每一种轴测投影图都有一定的描绘方法, 且难易不同。在立体几何中, 我们采用几种画法较为简单的轴测投影法。

透视法是建筑在中心投影的基础上的。所谓中心投影就是以一点为中心, 将空间图形投影到一个平面上。图 8 就是中心投影图形。图画和照片也都是透视作图的例子。尽管经过中心投影后, 直线还是变成直线, 可是平行直线却可以变成相交直线 (例如画中的铁轨和街道的两边), 因此图形的改变情况比经过平行投影时还要厉害。但是直观性最强, 看起来最象原物, 特别是使人看起来有远小近大的感觉。例

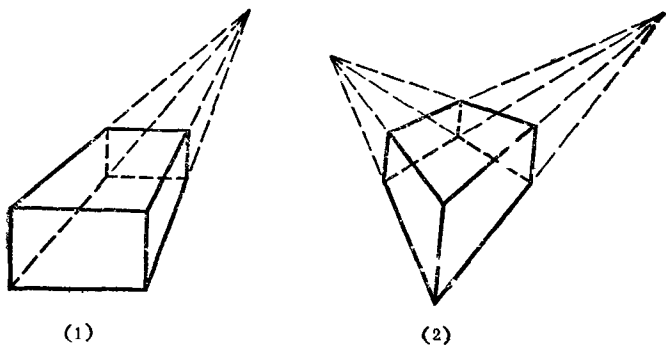


图 8

如下面一幅表示房屋内部结构以及屋内装饰的图，使人看了有身临其境的感觉。可惜的是原物的各部分尺寸和相对位置都变了样，因此要根据图形来恢复原物比较困难，而且画图方法也比较繁复，亦即画图的简易性较差。因此，尽管在

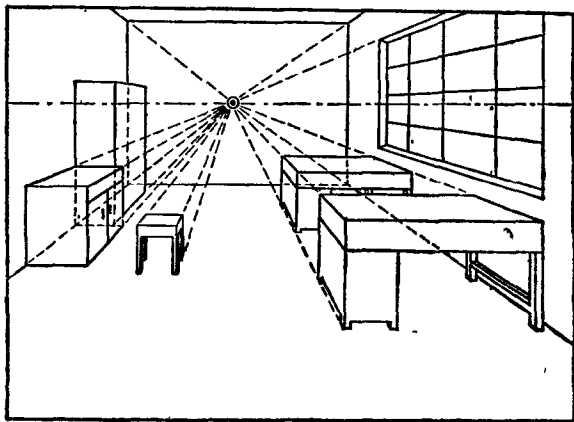


图 9

绘画中经常使用这种方法，但在立体几何中却很少利用这种方法来画图。

总之，在描绘立体几何图形时，一般都采用轴测法，而且采用最简单的或比较简单的轴测投影法。这样准确性、直观性和简易性都适当地照顾到，这是满足立体几何教学要求的。至于采用哪一种轴测投影法，以及它们所根据的原理是什么，下面再谈。

第二章 基本元素和基本关系的表示法

§1 基本元素的表示法

在立体几何中，我们三个基本元素——点、直线和平面。点和直线是在平面几何中经常遇到的。它们的表示方法我们已经很熟悉，没有重述的必要。因此下面主要谈谈平面的表示法。

我们周围有很多物体的表面是平面，它们的形状有很多是矩形的，当我们站在适当的位置和距离来观察一个矩形时，它看上去就象一个平行四边形。如果我们规定用矩形来表示一个平面，那么由于矩形在轴测投影里，它们的投影是一个平行四边形，因此在立体几何里，往往把一个平面画成一个平行四边形，并且设想它是能无限伸展的。特别地，对于处在水平位置的平面，我们往往用有一锐角成 45° 的平行四边形来表示。

但是上面所述的仅是一般的平面的表示法。事实上，要把每个平面都画成平行四边形，会使画图发生困难，也会使图形失去直观性（例如画交于一点的四个平面）。因此就有必要研究在各种不同情况下的平面的表示法。

在立体几何中，经常遇到下面所述各种情况下的平面：

（1）不在一直线上的三点所确定的平面；