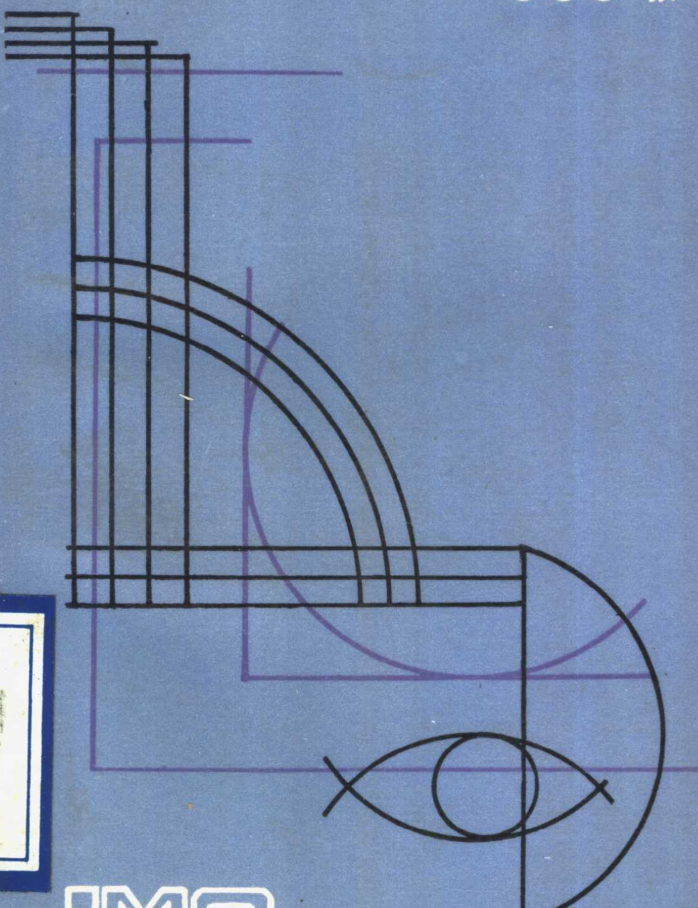
奥林匹克数学系列讲座

# 数学家的眼光

张景中



IMO

中国少年儿童出版社

AOLINPIKE SHU XUE XILIE JIANG ZUO

奥林匹克数学系列讲座

# 数学家的眼光

张景中

中国少年儿童出版社

封面设计：李恒辰
责任编辑：陈效师

奥林匹克数学系列讲座

**数学家的眼光**

张景中

中国少年儿童出版社出版发行
北京海淀区跃华印刷厂印刷　新华书店经销

787×970　1/32　4.5印张　2插页　65千字
1990年6月北京第1版　1990年6月北京第1次印刷
印数1—3,000册　定价：1.45元

## 内 容 提 要

数学家和普通人观察、处理问题的角度、方法确实不同：在常人看来繁难的问题，在数学家看来却十分简单；在常人看来相当简单的问题，在数学家看来却异常复杂。

张景中教授从中学生熟悉的简单数学问题入手，引出了一系列出乎人们预料之外的结论。他循循善诱，在初等数学和高等数学之间穿针引线，编织了一个又一个耐人寻味的数学问题。这种专门讲述中学和大学之间的数学，被人们称为奥林匹克数学。这本书相当成功地介绍了这种数学的思想。

此外，本书还披露由了三位中国数学工作者和一位高考落榜青年攻克的两个只需初中知识就能解决的世界难题。

# 目　　录

# 一 温 故 知 新

## 三角形的内角和

美籍华人陈省身教授是当代举世闻名的数学家。他十分关心祖国数学科学的发展。人们称赞他是“中国青年数学学子的总教练”。

在 1980 年，陈教授在北京大学的一次讲学中妙语惊人：

“人们常说，三角形内角和等于180°。但是，这是不对的！”

讲学大厅里爆发出一阵笑声。怎么回事呢？三角形内角和是180°，这不是数学常识吗？

接着，这位老教授对大家的疑问作了精辟的解答：

说“三角形内角和为180°”不对，不是说这个事实不对，而是说这种看问题的方法不对。应当说：“三角形外角和是360°”！

把眼光盯住内角，只能看到：

三角形内角和是180°；

四边形内角和是360°；

五边形内角和是540°；

…………

$n$边形内角和是$(n-2)\times180°$。

这就找到了一个计算内角和的公式。公式里出现了边数$n$。

如果看外角呢？

三角形的外角和是360°；

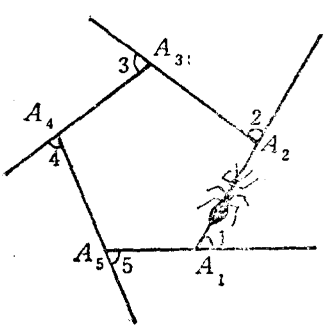
四边形的外角和是360°；

五边形的外角和是360°；

…………

任意$n$边形外角和都是360°。

这就把多种情形用一个十分简单的结论概括起来了。用一个与$n$无关的常数代替了与$n$有关的公式，找到了更一般的规律。

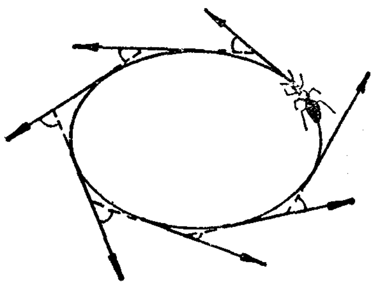



(图1)

设想一只蚂蚁在多边形的边界上绕圈子(图1)。每经过一个顶点，它前进的方向就要改变一次。改变的角度恰好是这个顶点处的外角。爬了一圈，回到原处，方

向和出发时一致了．角度改变量之和当然恰好是360°．

这样看问题，不但给“多边形外角和等于360°”这条普遍规律找到了直观上的解释，而且立刻把我们的眼光引向更宽广的天地。

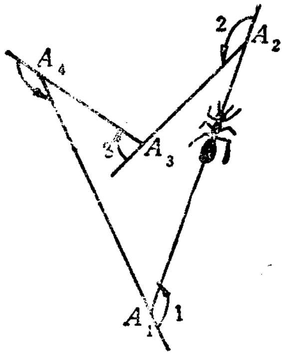


（图 2）

一条凸的闭曲线——卵形线，谈不上什么内角和与外角和。可是蚂蚁在上面爬的时候，它的方向仍在时时改变。它爬一圈，角度改变量之和仍是360°（图 2）。

“外角和为360°”，这条规律适用于封闭曲线！不过，叙述起来，要用“方向改变量之和”来代替“外角和”罢了。

对于凹多边形，就要把“方向改变量总和”改为“方向改变量的代数和”（图 3）。不妨约定：逆时针旋转的角为正角，顺时针旋转的角为负角。当蚂蚁在图示的凹四边形的边界上爬行的时候，在 $A_1$、$A_2$、

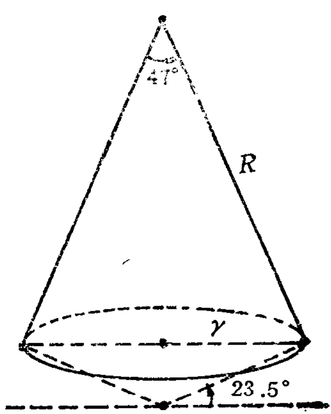



（图 3）

$A_4$处，由方向的改变所成的角是正角：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 4$；而在$A_3$处，由方向的改变所成的角是负角：$\angle 3$。如果你细细计算一下，这四个角正负相抵，代数和恰是360°。

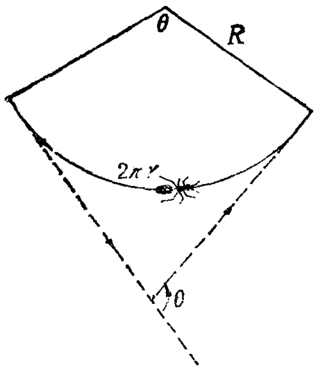
上面说的都是平面上的情形，曲面上的情形又是怎样呢？地球是圆的。如果你沿着赤道一直向前走，可以绕地球一圈回到原地。但在地面上测量你前进的方向，却时刻都没有变化。也就是说：你绕赤道一周，方向改变量总和是0°！

圈子小一点，你在房间里地板上走一圈，方向改变量看来仍是360°。




（图 4）

不大不小的圈子又怎么样呢？如果让蚂蚁沿着地球仪上的北回归线绕一圈，它自己感到的 也是在地球仪




（图 5）

表面上测量到的）方向的改变量，应当是多少呢（图4）？

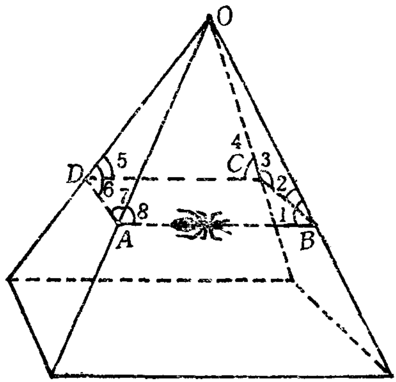
用一个圆锥面罩着北极，使圆锥面与地球仪表面相切的点的轨迹恰好是北回归线。这样，蚂蚁在球面上的方向的改变量和在锥面上方向的改变量是一样的。把锥面展开成扇形，便可以看出，蚂蚁绕一圈，方向改变量的总和，正好等于这个扇形的扇形角（图 5）：

$$\theta=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{2\pi r}{R}=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{2\pi R\sin 23.5^\circ}{R}$$

$$\approx 143.5^\circ.$$

要弄清这里面的奥妙，不妨看看蚂蚁在金字塔上沿正方形爬一周的情形（图 6）。它在拐角处方向改变了多大角度？把金字塔表面摊平了一看便知：在$B$处改变量是 $180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$；绕一圈，改变量是

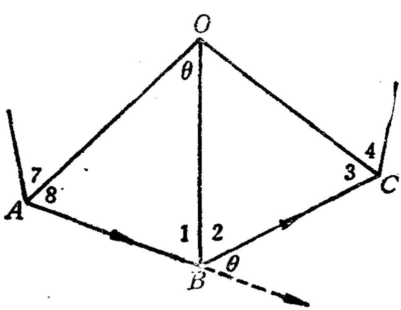
$$4\times 180^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$$
$$+\angle 6+\angle 7+\angle 8)$$




（图 6）

$=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA$ 这个和，正是锥面展开后的“扇形角”（图 7）！

早在欧几里德时代（两千多年前），人们已经知道三角形内角和是 180°。到了 19 世纪，德国数学家、被称为数学之王的高斯，在对大地测量的研究中，找到了球面上由大圆弧构成的三角形内角和的公式。又经过几代数学家的努力，直到 1944 年，陈省身教




（图 7）

授找到了一般曲面上封闭曲线方向改变量总和的公式(高斯——比内——陈公式)，把几何学引入了新的天地。由此发展出来的“陈氏类”理论，被誉为划时代的贡献。在理论物理学上有重要的应用。

从众所周知的平凡事实出发，步步深入、推广，挖掘出广泛适用的深刻规律。从这里显示出数学家们透彻、犀利的目光。也表现了数学家们穷追不舍、孜孜以求的探索真理的精神。

## 了不起的密率

提起中国古代的数学成就，都会想起南北朝时代的祖冲之。提起祖冲之，大家最熟悉的是他在计算圆周率 $\pi$ 方面的杰出贡献。他推算出：

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

他是世界上第一个把 $\pi$ 值准确计算到小数点后第七位的人。

祖冲之还提出用 $\frac{355}{113}$ 作为 $\pi$ 的近似分数。人们早一些已经知道 $\pi$ 的一个近似分数是 $\frac{22}{7}$，但误差较大。祖冲之把 $\frac{22}{7}$ 叫“约率”，把 $\frac{355}{113}$ 叫“密率”。这个 $\frac{355}{113}$ 传到了日本，日本人把它叫做“祖率”。

很多人都说用 $\frac{355}{113}$ 表示 $\pi$ 的近似值是一项了不

起的贡献。但是，它的妙处，却有不少人说不出来，或者说不全。

首先，它相当精确：

$$\frac{355}{113}=3.14159292035\cdots\cdots$$

而

$$\pi=3.1415926535897\cdots\cdots$$

所以，误差不超过 0.000000267。也就是说：

$$\left|\frac{355}{113}-\pi\right|<0.000000267.$$

也许你觉得，精确固然好，但精确并不是$\frac{355}{113}$的功劳。只要把 π 算得精确了，用个分数代表 π 还不容易吗？比方说，祖冲之既然把 π 算到小数后 7 位，那么自然可以用分数

$$\frac{314159265}{100000000}=\frac{62831853}{20000000}\approx3.14159265.$$

来作为 π 的近似值，误差不超过 0.000000005，岂不更精确？

但是，这个分数的分母比 113 大得多。分母大了，就不便写，不便记。

在数学家看来，好的近似分数，既要精确，分母最好又不太大。这两个要求是矛盾的。于是就要定下分子和分母怎么比法。

我们不妨看看分母大小相同的时候，谁更精确

一点。这有点像举重比赛，按运动员的体重来分级：轻量级和轻量级比，重量级和重量级比。这样一比，$\frac{355}{113}$的好处就显出来了。

如果你再耐着性子算一算，就又会发现：在所有分母不超过113的分数当中，和$\pi$最接近的分数就是$\frac{355}{113}$。所以，人们把它叫做$\pi$的一个"最佳近似分数"。

如果允许分母再大一些，允许分母是一个3位数，能不能找到比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$的分数呢？答案仍然是否定的：任一个分母小于1000的分数，不会比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$。

再放宽一点，分母是4位数呢？使人惊奇的是，在所有分母不超过10000的分数当中，仍找不到比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$的分数。

事实上，在所有分母不超过16500的分数当中，要问谁最接近$\pi$，只有$\frac{355}{113}$是当之无愧的冠军！祖冲之的密率之妙，该令人叹服了吧。

也许你问：有谁一个一个地试过吗？如果没试过，这冠军是如何产生的呢？

数学家看问题，有时候虽然也要一个一个地检查，但更多的是从逻辑上推断，一览无遗地弄个明明

白白。要说明分母不超过16500的分数不会比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$，道理并不难：

已经知道$\pi=3.14159265358 97\cdots\cdots$，而$\frac{355}{113}=3.14159292035\cdots\cdots$，所以

$$0<\frac{355}{113}-\pi<0.00000026677. \qquad (1)$$

如果有一个分数$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$，一定有

$$-0.00000026677<\pi-\frac{q}{p}<0.00000026677. \qquad (2)$$

把(1)与(2)相加，得到

$$-0.00000026677<\frac{355}{113}-\frac{q}{p}<2\times 0.00000026677. \qquad (3)$$

由(3)，可得

$$\frac{|355p-113q|}{113p}=\left|\frac{355}{113}-\frac{q}{p}\right|<2\times 0.0000002667.$$

因为$\frac{q}{p}$和$\frac{355}{113}$不等，故$|355p-113q|>0$，但又因$p$、$q$都是整数，故$|355p-113q|\geqslant 1$。于是

$$\frac{1}{113p}\leqslant\frac{|355p-113q|}{113p}<2\times 0.00000026677. \qquad (5)$$

把不等式中的$p$解出来，得

$$p>\frac{1}{113\times 2\times 0.00000026677}>16586. \qquad (6)$$

这表明，若$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$，分母$p$一定要比16586还大。

具体地说，比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$的分数当中，分母最小的是

$$\frac{52163}{16604}=3.141592387\cdots\cdots \tag{7}$$

它比$\frac{355}{113}$略强一点，但分母却大了上百倍。

祖冲之的眼光真锐利。他从这么多分数当中找出了又精确又简单的密率。

祖冲之用什么方法计算$\pi$，又怎么找出了$\frac{355}{113}$，这已经无法查考了。现在，人们已经会用"连分数"展开法，根据$\pi$值把它的一系列最好的近似分数找出来。方法如下.

设 $$\pi=3+0.141592653\cdots\cdots=3+a_1=3+\cfrac{1}{\left(\cfrac{1}{a_1}\right)}, \tag{8}$$

则

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{0.141592653\cdots\cdots}=7.062513305\cdots\cdots$$

$$=7+a_2. \tag{9}$$

把(9)代入(8)，可得 $\pi=3+\frac{1}{7+a_2}$，略去$a_2$，得