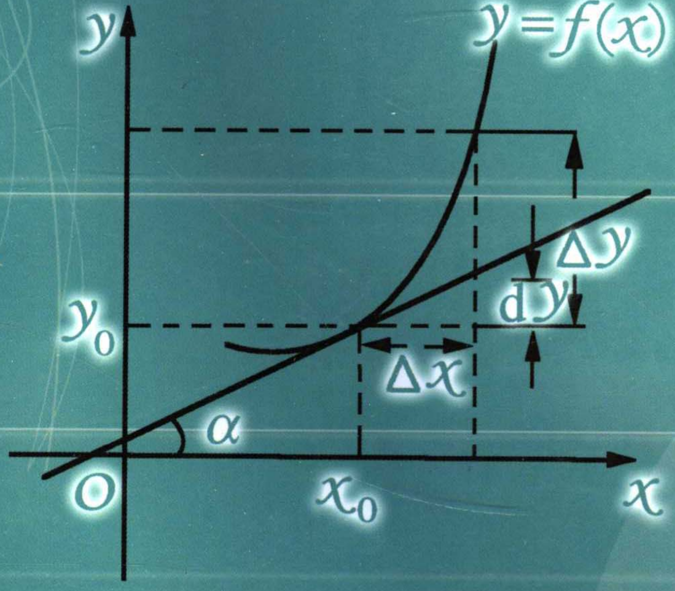
普通高校基础数学教材系列

高等数学(上册)

Gaodeng Shuxue

主编 殷锡鸣 许树声
李红英 苏德中



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校基础数学教材系列

高 等 数 学

（上 册）

主编 殷锡鸣 许树声
李红英 苏德中

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/殷锡鸣 等主编. —上海:华东理工大学出版社,2003.12

ISBN 7-5628-1455-4

Ⅰ. 高... Ⅱ. 殷... Ⅲ. 高等数学-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 085864 号

高 等 数 学

(上册)

普通高校基础数学教材系列

主编 殷锡鸣 许树声 李红英 苏德中

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×960 1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	**印张**	20.75
邮编	200237 **电话**(021)64250306	**字数**	388 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2003 年 12 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2003 年 12 月第 1 次
印刷	上海长阳印刷厂	**印数**	1—5 550 册

ISBN 7-5628-1455-4/O・91　　定价:28.00 元

前　言

高等数学是高等院校理工科各专业的一门重要的基础课程，它主要为学生学习后继课程，进一步从事工程技术和科学研究提供必要的数学基础。随着高校人才培养的多元化，对高等数学教材的要求也呈现出多元化的需求特点。

本教材是编者根据教育部 1998 年颁布的全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求编写的，在保证基本要求，遵循成人教育的教学规律，充分考虑成人教育特点的前提下，在教材的选材和编写中充分体现了以下的特点。

1. 选材以培养应用型人才为目标。在内容的深度上以“必需”和“够用”为界。对定理、定义及有关理论的介绍注重几何直观和物理背景，力求阐明它们的实际背景和基本思想，而不过于追求严格的数学证明。

2. 重点突出，难点分散。针对成人教育的特点，在例题的选择上力求全面、典型；在论述的方式上力求通俗易懂；突出对问题难点的分析以及解决问题的思想方法的阐述。

3. 本书例题较多，习题丰富。每节末配有大量的习题，章末配有复习题，阶段末配有阶段自测题和期中、期末模拟试题。为了便于读者复习，在每一章末安排了该章的小结，小结写得比较详细，有基本要求、主要内容、学习指导等内容，可加深读者对教材内容的理解和掌握。

4. 本教材也可作为成人教育专科高等数学课程的教材。对于专科的学生，由于学时数的限制以及专业的需要，教师可根据全国成人高等教育专科高等数学教学基本要求酌情取舍教学内容。

本书由华东理工大学成人教育学院组织编写，全书共分 7 章，其中第 5 章、第 6 章、第 7 章由殷锡鸣编写，第 2 章与第 4 章由许树声编写，第 1 章与第 3 章由李红英编写，苏德中参予了部分内容的编写。在编写过程中，得到了华东理工大学成人教育学院领导焦家骏、张德振同志以及理学院领导王宗尧教授、鲁习文教授，出版社领导朱广忠、荣国斌、姚瓔、张辉同志的大力支持和关心，在此表示衷心的感谢。同时我们还要感谢高等数学教研室的龚成通、王刚、陈秀华、周根成、苏纯洁、江志松、宋洁、方民、李继根等老师，他们在本书的编写过程中提出了

许多宝贵的建议。

由于编者水平有限,书中难免留存错、漏和不妥之处,敬祈专家、读者予以指正。

编　者

2003.9

目 录

第4章 微分中值定理与导数的应用

第5章 积分

第6章 积分法

第 7 章　定积分的应用与广义积分

附录 1　模拟试题

附录 2　答案

第1章 函数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的主要研究对象是变量. 函数关系是变量之间的依赖关系，它是高等数学中的基本概念之一. 本章在复习中学阶段有关函数知识的基础上，进一步讨论函数的表示法，研究函数的性质.

1.1 预备知识

1.1.1 集合

集合是数学中的一个基本概念. 我们通过一些具体例子来解释这个概念. 比如，一个班级里的学生构成一个集合，一个教室里的桌子构成一个集合，全体自然数构成一个集合等等. 一般地，具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**(简称**集**)，组成这个集合的对象称为该集合的**元素**.

通常用大写英文字母 A, B, C, $\cdots$ 表示集合，用小写英文字母 a, b, c, $\cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记为 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，记为 $a \notin A$. 若一个集合只含有限个元素，则称为**有限集**；否则，称为**无限集**.

表示集合的方法通常有两种：**列举法**和**描述法**. 所谓列举法，就是把集合的所有元素一一列举出来，例如由数 1, 3, 5, 7, 9 组成的集合 A 可表示成

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

所谓描述法，就是把集合中元素的公共属性描述出来，即若集合 A 是由具有性质 P 的元素 x 组成的集合，则可表示成

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}. \tag{1-1}$$

例 1 若集合 B 是方程 $x^2-6x+5=0$ 的解集，则 B 可表示成

$$B=\{x \mid x^2-6x+5=0\}.$$

如果根本不存在具有性质 P 的元素，那么形如(1-1)的集合就称为**空集**，记为 $\varnothing$. 至少含有一个元素的集合称为**非空集合**. 引进空集的概念会带来许多便利.

今后常用到的几个数集是实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，正整数集 $\mathbb{N}^+$，全体整数集 $\mathbb{Z}$，有理数集 $\mathbb{Q}$，它们可分别表示为

$$\mathbb{R}=\{x \mid x \text{ 是实数}\},$$
$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\},$$
$$\mathbb{N}^+=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\},$$
$$\mathbb{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

1.1.2 区间和邻域

区间是用得很多的一类数集. 设 a, b 都是实数，且 $a<b$, 数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

a、b 分别称为该区间的左端点与右端点，而集合中其它点 x 称为区间的内点，显然端点 $a, b \in [a, b]$.

数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为**开区间**，记作 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\},$$

a、b 也称为该区间的左端点与右端点，但这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$.

类似地有

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\},$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 统称为**半开区间**.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些区间都是长度有限的线段。闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上的表示

分别如图 1-1(1)和 1-1(2). 另外,我们还会遇到无穷区间或半无穷区间,可类似地表示为

$$[a,\ +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(a,\ +\infty) = \{x \mid a < x\},$$
$$(-\infty,\ b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$
$$(-\infty,\ b) = \{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty,\ +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

其中“$+\infty$”读作“正无穷大”,“$-\infty$”读作“负无穷大”,“∞”读作“无穷大”. 无穷区间也可在数轴上表示,例如 $[a,\ +\infty)$, $(-\infty,\ b)$ 分别如图 1-1(3)与 1-1(4)所示.

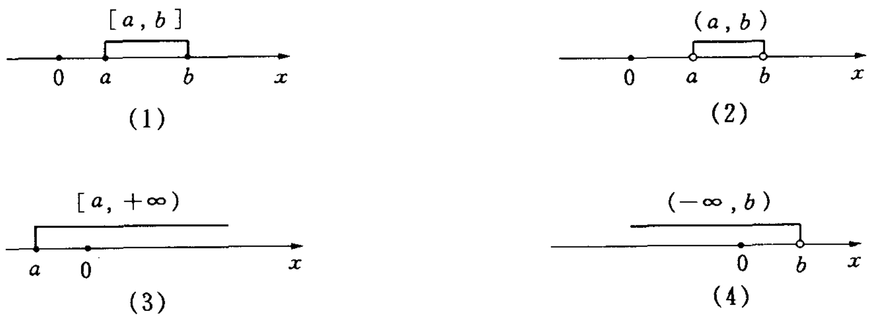


图 1-1

今后在不需要说明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无穷区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且常用“I”表示.

邻域也是高等数学中经常用到的概念。包含点 a 的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $N(a)$.

设 δ 为一正数,则开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $N(a,\ \delta)$,即

$$N(a,\ \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

或

$$N(a,\ \delta) = (a-\delta,\ a+\delta),$$

点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**. (如图 1-2(1))

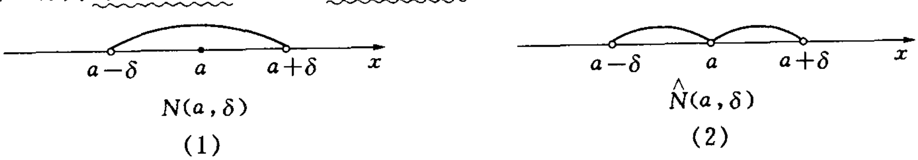


图 1-2

在邻域 $N(a, \delta)$中去掉中心 a 得到的实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\hat{N}(a, \delta)$,即

$$\hat{N}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或

$$\hat{N}(a, \delta)=(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

如图 1-2(2)所示。

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**,开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

1.1.3 实数的绝对值

实数的绝对值是高等数学中经常用到的概念,下面介绍实数的绝对值及其性质.

实数 x 的绝对值记为$|x|$,其定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

例如,$|3.5|=3.5$, $|-0.25|=0.25$, $|0|=0$. 从几何意义上讲,实数 x 的绝对值$|x|$表示数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质:

(1) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,有 $|x| \geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 时,才有 $|x|=0$.

(2) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,有 $|-x|=|x|$.

(3) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,有 $|x|=\sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(5) 设 $a>0$, 则 $|x|<a$ 的充要条件是 $-a<x<a$.

(6) 设 $a \geqslant 0$, 则 $|x| \leqslant a$ 的充要条件是 $-a \leqslant x \leqslant a$.

(7) 设 $a \geqslant 0$, 则 $|x|>a$ 的充要条件是 $x>a$ 或 $x<-a$.

(8) 设 $a \geqslant 0$, 则 $|x| \geqslant a$ 的充要条件是 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$.

由性质(5)容易推得不等式 $|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的,其中 A 为实数,a 为正实数.

下面,我们给出有关实数四则运算的绝对值的几个结论.

对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$,恒有

(1) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ 　(三角不等式);

(2) $|x-y| \geqslant ||x|-|y|| \geqslant |x|-|y|$;

(3) $|xy| = |x| \cdot |y|$;

(4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ 　$(y \neq 0)$.

下面仅就结论(1)给出证明.

证　由性质(4),有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, 及 $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$, 从而

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|,$$

由于 $|x|+|y| \geqslant 0$, 再由实数绝对值之性质(6)即得

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

习题 1.1

1. 用区间表示下列范围:

(1) $x \leqslant 2$;　　(2) $-2 \leqslant x < 3$;

(3) $|x-1| < \varepsilon$;　　(4) $\hat{N}(2, \delta)$.

2. 用绝对值不等式和区间分别表示点-1的 δ 邻域与去心 δ 邻域.

3. 求邻域半径 δ,使 $x \in N(1, \delta)$ 时必有 $|3x-3| < \varepsilon$.

若 ε 分别为 0.01, 0.1 时,上述 δ 各等于多少?

4. 求解下列绝对值不等式:

(1) $|x^2-1| < 2$;　　(2) $|x+1| > 1$;

(3) $|x^2-3x+1| \leqslant 1$;　　(4) $|x^2+2x| \geqslant 3$.

1.2 函数及其性质

1.2.1 函数概念

在研究实际问题,观察各种现象或过程的时候,会遇到各种不同的量. 其中有的量在整个考察过程中始终保持不变,这种量称之为**常量**,例如在地球表面附近重力加速度 g 便是常量. 还有一些量可取不同的数值,这种量称为**变量**,例如在考察自由落体的运动过程时,物体下落的距离和所花的时间都是变量.

在同一过程中,往往有几个不同的变量在同时变化着. 这些变量往往不是孤

立的,它们之间有着一定的内在联系,按照某种规律变化着.

下面我们先来看两个例子.

例 1 设圆的半径为 r,圆的面积为 S,则 S 与 r 之间的对应关系如下面公式

$$S = \pi r^2.$$

当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 上任取一个数值时,按照上式,S 就有一个确定的数值与之对应.

例 2 设一物体作匀速直线运动,其速度为 v,物体开始运动的时刻 $t = 0$,则物体运动的路程 s 与时间 t 有如下关系:

$$s = vt.$$

如果我们考察一段时间 $[0, T](T > 0)$ 内物体走过的路程,当时间 t 在区间 $[0, T]$ 上取定一个数值时,按照上式,s 都有一个确定的数值与之对应.

以上两例均表达了两个变量之间的依赖关系,当其中一个变量在某一数集内任意取定一数值时,另一变量按此关系有一确定的值与之相对应. 两个变量之间的这种依赖关系就称为函数关系.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

当自变量 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数的**值域**.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母,例如"g","F","φ",等等. 这时就记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等等.

由函数的定义可知,一个函数是由它的定义域及其对应法则完全确定的. 如果两个函数 f 和 g,它们有相同的定义域和相同的对应法则,则这两个函数是同一个函数.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1 中,定义域为 $D = (0, +\infty)$;在例 2 中,定义域 $D = [0, T]$. 在数学中,往往不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定:**函数的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的一切实数值.** 例如函数 $y = \lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $y = 2\lg x$ 的定义域是$(0, +\infty)$.

例 3　求函数 $y=\dfrac{3}{x^2-4}$ 的定义域.

解　此函数只有当 $x^2-4\neq 0$ 时,即 $x\neq\pm 2$ 时表达式才有意义.所以函数的定义域为 $x\neq\pm 2$ 的全体实数,用区间表示为

$$D=(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty).$$

例 4　求函数 $y=\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解　要使此函数有意义,必须同时使 $\arcsin x$ 与 $\ln\sqrt{1-x^2}$ 有意义,因此 x 须满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $1-x^2>0$,即定义域为

$$D=[-1,\ 1]\cap(-1,\ 1)=(-1,\ 1).$$

例 5　设有函数 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}$ 和 $g(x)=1-x$,它们是否表示同一个函数?

解　虽然 $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,\ +\infty)$,但是当 $x>1$ 时,它们的函数值不同,即它们的对应法则不一样,例如

$$f(2)=1,\ g(2)=-1.$$

所以 $f(x)$与 $g(x)$是两个不同的函数.

例 6　设有函数 $f(x)=x+2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$,问它们是否代表同一个函数?

解　因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$,而 $g(x)$的定义域为 $(-\infty,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$. 虽然当 $x\neq 2$ 时,函数值 $f(x)=g(x)$,但由于两个函数的定义域不同,因此它们不是同一个函数.

例 7　已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,求 $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解

$$f(2)=\frac{1+2}{1-2}=-3,$$

$$f(-x)=\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\frac{1-x}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x+1}{x-1}.$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值都只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**. 上述几个例子中的函数都是单值函数,下

面举一个多值函数的例子.

例 8 在直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$,此方程在闭区间 $[-r, r]$ 上确定了一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数. 当 x 取 $-r$ 或 r 时,对应的函数值都只有一个,但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 内的任一数值时,对应的函数值就有两个,所以这函数是多值函数.

在本书中,*以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.*

1.2.2 函数的表示

为了研究函数,首先必须采用适当的形式把函数表示出来,即把因变量与自变量之间的对应关系表示出来. 表示函数的方法主要有以下几种:

(1) *公式表示法* 即用数学公式来表示函数关系. 例如函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-1}$, $g(x)=\sin(\ln x)$ 等等,这是最常见的一种表示方法.

(2) *表格表示法* 即把一系列自变量值与其对应的因变量值,列成表格形式来表示函数. 平方根表、对数表、三角函数表等,就是最常见的用表格表示的函数.

(3) *图形表示法* 即用坐标平面上的曲线来表示函数. 一般自变量用横坐标表示,因变量用纵坐标表示,则坐标平面上的点集

$$G=\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 的图形(图 1-3). 图中的 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

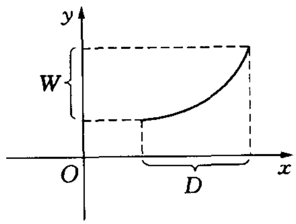


图 1-3

下面举几个函数的例子.

例 9 函数

$$y=x^2$$

的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=[0, +\infty)$, 它的图形称为抛物线,如图 1-4 所示.

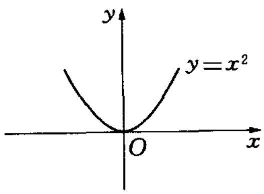


图 1-4

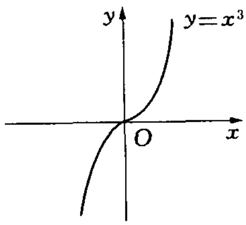


图 1-5

例 10　函数

$$y = x^3$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = (-\infty, +\infty)$，它的图形称为立方抛物线，如图 1-5 所示.

例 11　函数

$$y = \frac{1}{x}$$

的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，值域 $W = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，它的图形称为等轴双曲线，如图 1-6 所示.

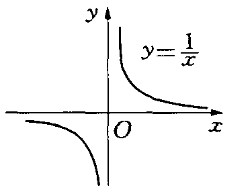


图 1-6

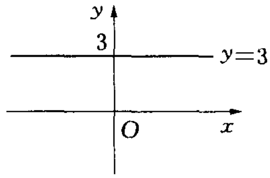


图 1-7

例 12　函数

$$y = 3$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = \{3\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-7 所示.

1.2.3　分段函数

用公式法表示一个函数通常用一个数学式就可以了，例如：$y = \sin 2x$，$y = a^{-3x}$ 等等. 但有一些函数，当自变量在不同的范围内取值时，须用不同的表达式来表示，这样的函数称为**分段函数**.

例 13　绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = [0, +\infty)$，它的图形如图 1-8 所示.

例 14　符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = \{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-9 所示.