College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

微积分
学习指导教程

电子科技大学应用数学学院

傅英定　彭年斌　主编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

微积分学习指导教程

电子科技大学应用数学学院

傅英定　彭年斌　主编

高等教育出版社

内容提要

《微积分学习指导教程》是电子科技大学国家工科数学课程教学基地编写的工科数学系列参考书之一。本书是根据教育部颁发的《关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求》，在我校《微积分同步学习指导》教材的基础上，遵循工科硕士研究生入学考试大纲，参考近年来各重点院校的优秀考研复习资料编写而成。本书的主要特色是：本着面向21世纪深化课程体系与教学内容改革的精神，重在培养学生分析问题的能力；以育人为本、学生为本、质量为本；注重内容与体系的整体优化；为现代数学适度地提供"窗口"与"接口"；重视数学思想与方法，适当淡化运算技巧；重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。

本书共八章，每章分为七部分：基本要求、基本内容、概念剖析、典型例题、思考与练习、单元检测题、答案与提示。每章后面介绍了在微积分发展史上做出重大贡献的中外数学家。附录中有电子科技大学最近三年的"微积分"期末考试试题及参考解答，三套数学竞赛试题及参考解答。

本书主要供报考研究生者、普通高校、成人教育、高教自考等各类本科生读者学习高等数学时参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导教程／傅英定，彭年斌主编．—北京：高等教育出版社，2005.6
ISBN 7-04-016702-6

Ⅰ.微…　Ⅱ.①傅…②彭…　Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第046529号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 蒋　青　**封面设计** 于　涛　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 胡志萍　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005年6月第1版
印　　张	29.75	印　　次	2005年6月第1次印刷
字　　数	560 000	定　　价	30.90元

物料号　16702-00

郑重声明

前　言

《微积分学习指导教程》是电子科技大学国家工科数学课程教学基地编写的工科数学系列参考书之一。本书是根据教育部颁发的《关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求》,在我校《微积分同步学习指导》教材的基础上,遵循工科硕士研究生入学考试大纲,参考近年来各重点院校的优秀考研复习资料编写而成。本书由电子科技大学应用数学学院长期从事微积分教学,具有丰富教学经验的教师编写,编写的指导思想是:紧扣大纲,突出重点;加强基础,重视综合;总结题型,启迪思路;注重应用,提高能力。

本书力求突出以下特点:

一、注重教学内容与体系整体优化

本书在内容编写上注重教学内容与体系的整体优化,参考了国内优秀的微积分教材和一些学校在精品课程建设中新开发的多媒体高等数学网上答疑系统,对各章节的知识点及重难点作了精心编排,若学生能在学习微积分时认真参考本教程,定能在学习上收到很好的效果。

二、注重概念,引导学生研究式的学习

本书特别增加了"概念剖析"部分,将教学过程中发现的困扰学生的一些概念进行了详细深入的分析,其中的一些问题就是学生在讨论课上提出来的,教师对这些概念的剖析,引起了学生对数学的浓厚兴趣。

三、重视数学思想与方法,适当淡化运算技巧

计算机技术的迅速发展及数学软件的广泛应用使得求极限、求导与求积分的运算技巧有必要适当淡化。因此,本书在编写时尽量少举一些计算繁难的例题,多介绍一些基本题,把重点放在介绍数学思想与方法上。

四、充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力

本书力求将数学建模的思想和方法渗透到教材中去,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。每一单元都重视了应用题的选择和分析解答。

本书根据教学内容分为八章,每章分为七部分:基本要求、基本内容、概念剖析、典型例题、思考与练习、单元检测题、答案与提示。每一章后面分别介绍了在微积分发展史上做出了伟大贡献的中外数学家,希望对读者有所启发和帮助。

为了帮助读者检查自己对知识的掌握情况,除每章附有检测题外,在附录里还有三套电子科技大学最近三年使用的《微积分》上、下册期末考试试题及参考解答。

电子科技大学每年九月举办的全校高等数学竞赛吸引了不少优秀学生参加。竞赛试题主要考查掌握知识的灵活性及综合应用数学知识解决实际问题的能力。试题有较大的参考价值,所以特在附录里选编了三套电子科技大学最近三年《高等数学竞赛试题》及参考解答。

本书内容全面、例题典型、分析透彻、叙述清楚、便于自学,可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本科学生读者参考,尤其对报考研究生者有较大的参考价值。

本书由傅英定、彭年斌主编。各章撰写者分别是:赵汇渝(第一章)、于泰彬(第二章)、杨春(第三章)、高建(第四章)、冷劲松(第五章)、王晓梅(第六章)、彭年斌(第七章)、贾闽惠(第八章)、谢云荪(附录)。本书由向学勤审稿,黄廷祝、谢云荪教授对本书的编写给予了很大的帮助,在此一并深表感谢。

限于编者水平,难免有不妥之外,敬请批评指正。

编　者

2005 年元月于成都

目　　录

第一章　函数　极限与连续

一、基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念(对极限的 ε-N,ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求).
7. 掌握极限四则运算法则.
8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限的结果来求极限.
9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数在一点连续的概念.
11. 了解间断点的概念,并会判断间断点的类型.
12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大、最小值定理).

二、基本内容

(一) 函数

1. 函数的概念及其表示法

定义:设 X 和 Y 为两个非空实数集,若存在某一对应规律(或法则)f,使得对于 X 中任一数 x,Y 中都有唯一确定的实数 y 与它对应,则称 f 为定义在 X 上的函数,记为 $f:X\to Y$ 或简记为 $y=f(x)$.

2. 函数的几种简单形态

(1) 奇偶性:$f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称,若对 $\forall x\in D_f$,有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数;若对 $\forall x\in D_f$,有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) 单调性:对 $\forall x_1,x_2 \in (a,b)\subset D_f$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $Y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

(3) 周期性:$f(x)$ 在 $D_f=(-\infty,+\infty)$ 上有定义,若存在常数 $T\neq 0$,对 $\forall x$ 有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期,通常所说的周期是指最小正周期.

(4) 有界性:若 $\exists M>0$,使 $\forall x\in X\subset D_f$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,称 $f(x)$ 在 X 上有界.

3. 基本初等函数、复合函数和初等函数

(1) 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(2) 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 Z_φ,若 $Z_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$,则可定义 D_φ 的一个子集上的函数 $y=f[\varphi(x)]$,称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

(3) 初等函数

由基本初等函数通过有限次四则运算或有限次复合得到,且能用一个解析表达式表示的函数,称为初等函数.

(二) 极限的概念性质和运算

1. 数列极限的定义

(1) 数列的极限

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 A,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$ 使 $\forall n>N$,都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,也称 x_n 收敛于 A,如果 $\{x_n\}$ 没有极限,则称 $\{x_n\}$ 是发散的.

(2) 函数的极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有定义,A 为一常数,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,-a)$ $(a>0)$ 内有定义,A 为一常数,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

还有单侧极限的概念,这里不再重复,需要指出的是由变量的变化状态,有

以下几种情况：$x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$，$x \to \infty$.

2. 无穷小量

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷小量，简称为无穷小.

（1）无穷小的运算

有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小，由此可以推出：常数与无穷小的乘积为无穷小；有限个无穷小的乘积为无穷小.

（2）函数及其极限与无穷小的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$　（其中A为常数，$\lim \alpha(x) = 0$）

（3）无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若$f(x)$是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小；若$f(x)$是无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

3. 极限的四则运算

若$\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$，$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

4. 极限的性质

（1）唯一性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，则$A = B$.

（2）局部保号性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$　（或$A < 0$），则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$f(x) > 0$　（或$f(x) < 0$）.

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，若$A < B$，则存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) < g(x)$.

若存在x_0的某个去心邻域，有$f(x) \leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则$A \leqslant B$.

（3）局部有界性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在$\delta > 0$，以及$M > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x)| \leqslant M$.

5. 极限存在准则及两个重要极限

（1）夹逼准则

若在 x_0 的某个去心邻域内,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调且有界,则数列 $\{x_n\}$ 必有极限存在.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 和} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

推广: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]}$ (其中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$).

6. 无穷小的比较以及代换定理

设 $\lim\alpha(x)=0$, $\lim\beta(x)=0$ $(\beta(x)\neq 0)$.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c\neq 0)$,则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小,特别地,若 $c=1$,则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(2) 若 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$,而且 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$ (或 ∞),则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$ (或 ∞).

(3) 设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 均为 $x\to x_0$ 时的无穷小量,而且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$ (c 为常数, $k>0$),则称当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

(4) 一些常见的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

(三) 函数的连续性

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续的等价定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是连续的.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是连续的.

（3）如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

2. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，记为 $f(x)\in C(a,b)$；若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且在该点 a 和 b 处分别右连续和左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，记为 $f(x)\in C[a,b]$.

3. 函数的间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 间断点一般分为两类：

（1）第一类间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在的间断点叫做第一类间断点，又可将其分为跳跃型和可去型两种：跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在 x_0 处无定义或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

（2）第二类间断点

凡是不属于第一类间断点的间断点叫做第二类间断点，常见的有无穷型（若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个是无穷大）和振荡型（若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个作无穷次振荡）两种.

4. 闭区间上连续函数的性质

（1）最大（小）值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使对一切 $x\in[a,b]$ 都有 $f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必有最小值 $f(\xi_1)$ 和最大值 $f(\xi_2)$.

（2）有界性定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即必存在正数 M，使对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M$.

（3）介值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，若 μ 是 $f(a)$，$f(b)$ 之间任何一个数，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

推论（零点定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

三、概念剖析

问题 1　什么是映射？什么是单射？什么是满射？

答　映射是两个非空实数集之间存在的一个对应规律（或法则）f. 例如：X

和 Y 分别是两个非空数集，如果按照某种确定的法则 f，对于集合 X 中的任何一个元素 x，在集合 Y 中都有唯一的元素 y 与之对应，那么 f 就是从集合 X 到集合 Y 的映射. 如果对于每一个 $y \in Y$，都有唯一的 $x \in X$，使 $f: x \to y$，称 f 是 X 到 Y 的单射. 如果对于任意的 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使 $f: x \to y$，称 f 是 X 到 Y 的满射.

问题 2 单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

答 不是的. 一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应，那么必有单值反函数，否则就没有单值反函数. 函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件.

例如函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x+1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不单调（图 1-1(a)），但它存在单值反函数（图 1-1(b)）

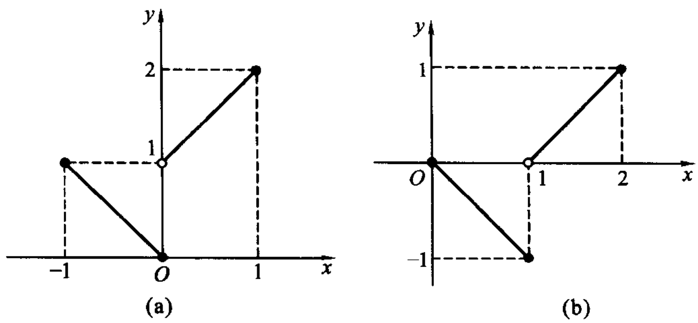

图 1-1

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

又如函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ -x & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调，但有单值反函数 $\varphi^{-1}(x) = \varphi(x)$.

问题 3 有人说：数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示当 n 充分大后，x_n 越来越接近于 a，这种说法对吗？

答 这种说法不准确. 应当说，"当 n 充分大时，x_n 与 a 之差的绝对值小于预先给定的任意正数 ε". 或者说"当 n 越来越大时，x_n 越来越无限接近于 a". 因为越来越接近于 a，只能理解为 $|x_n - a|$ 单调减少，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 则表示为 $|x_n - a|$

趋于 0. 单调减少不一定得趋于 0，趋于 0 也不一定单调减少. 例如 $y_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$，但 $|y_n - 0| = y_n$ 并非单调减少，即 y_n 并非越来越接近于 0. 所以数极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示的是：当 n 无限增大时，x_n 任意地（或无限地）接近于 a，或者说，x_n 趋近于 a.

问题 4　数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 是否同敛散？

答　一般不是同敛散.

若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{|x_n|\}$ 也收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. 这是因为：对于任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

从而

$$\big||x_n| - |a|\big| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon.$$

若 $\{|x_n|\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 可能收敛，也可能发散，例如 $\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的，但 $\{(-1)^n\}$ 发散.

当然，也有 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散的情形，例如：

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；

当 $\{x_n\}$ 恒正或恒负时，$\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散.

类似地，读者可考虑

$\lim f(x)$ 与 $\lim |f(x)|$ 的敛散关系；

$\lim f(x)$ 与 $\lim |f(x)|^2$ 的敛散关系.

问题 5　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$，则必有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 1,$$

对吗？

答　不对. 产生问题的原因在于忽视了商的极限运算法则的一个条件：分母的极限不能为零.

所以，当 $a \neq 0$ 时，结论是正确的.

当 $a = 0$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 可以存在，也可以不存在，且存在的话，也不一定等于 1.

例如数列 $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}[2+(-1)^n]\right\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，而极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$$

并不存在.

又如数列$\{x_n\}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}.$$

问题 6 什么叫数列的子数列,数列与其子数列的敛散性有什么关系.

答 数列$\{x_{n_k}\}$称为数列$\{x_n\}$的子数列,简称子列.

关于子数列,一般地,我们有如下的定义

如果在数列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

中,考虑任何一个部分数列

$$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

其中$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$为任一个上升的正整数数列,那么称数列$\{x_{n_k}\}$($k=1,2,3,\cdots$)为数列$\{x_n\}$的子数列. k表示x_{n_k}在子数列$\{x_{n_k}\}$中是第k项,而n_k表示x_{n_k}在$\{x_n\}$中是第n_k项.

例如$\{x_{2n}\}$,$\{x_{2n-1}\}$,$\{x_{4n+1}\}$,$\{x_{4n+2}\}$等等都是$\{x_n\}$的子数列. 特别地,$\{x_n\}$本身也可称为$\{x_n\}$的子数列.

按定义,显然对每一个k有$n_k\geqslant k$,故$\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$.

关于子数列的极限有下述定理:

定理 $n_k\geqslant k$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (或∞)的充分必要条件是$\{x_n\}$的任何子列都以a (或∞)为极限.

所以当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$. 但$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

问题 7 如果数列$\{a_n\}$收敛,$\{b_n\}$发散,那么$\{a_nb_n\}$是否一定发散? 如果$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都发散,那么$\{a_nb_n\}$的收敛性又将怎样?

答 在以上两种假设情况下,$\{a_nb_n\}$的收敛性都不能肯定. 现在先对$\{a_n\}$收敛,$\{b_n\}$发散的情况来分析.

利用$b_n=\frac{a_nb_n}{a_n}$这个恒等式,就可得到下述结论:若$\{a_n\}$收敛且不收敛于零,$\{b_n\}$发散,则$\{a_nb_n\}$必发散. 这是因为若$\{a_nb_n\}$收敛,且$\{a_n\}$又不收敛于零,则从上述恒等式及商的极限法则知$\{b_n\}$收敛,这与假设矛盾.

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,而$\{b_n\}$发散,则$\{a_nb_n\}$可能收敛,也可能发散. 例如

(1) 若$a_n=\frac{1}{n}$,$b_n=n$,则$a_nb_n=1$,于是$\{a_nb_n\}$收敛;

(2) 若$a_n=\frac{1}{n}$,$b_n=n^2$,则$a_nb_n=n$,于是,$\{a_nb_n\}$发散.