21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

经济应用数学基础（一）

微积分

全程导学及习题全解

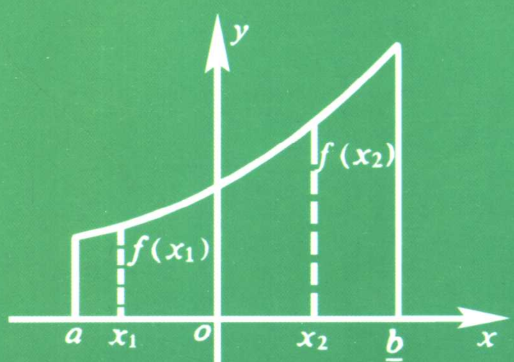
人大修订本

主编 苗明川 副主编 杨薤 潘大伟 主审 周小平

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社

21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

经济应用数学基础（一）

微积分

全程导学及习题全解

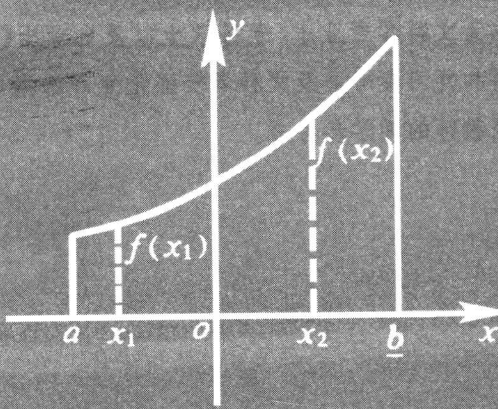
人大修订本

主编 苗明川 副主编 杨蕤 潘大伟 主审 周小平

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分全程导学及习题全解/苗明川主编.—北京:中国时代经济出版社,2006.2

(21世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7-80169-893-2

Ⅰ.微... Ⅱ.苗... Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第157178号

微积分全程导学及习题全解

苗明川 主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地　　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层
邮政编码	100007
电　　话	(010)68320825　68320496
传　　真	(010)68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京市世界知识印刷厂
开　　本	880×1230　1/32
版　　次	2006年2月第1版
印　　次	2006年2月第1次印刷
印　　张	12.375
字　　数	390千字
印　　数	1~5000册
定　　价	15.00元
书　　号	ISBN 7-80169-893-2/G·376

内容简介

本书是人大版经济类《微积分》教材的一本配套学习辅导与习题解答教材。编写的重点在于原教材全部习题的精解详答,并在给出解答过程的同时,逐步阐述了解题的脉络与依据,逻辑严谨,深入浅出,叙述详尽易懂,希望读者从本书中得到的不仅是题目的答案,更重要的是求解的过程和方法以及思考问题的方式。在《微积分》教材给出的各章习题的基础上,精选了相应知识点的补充习题,让学有余力的同学可以有的放矢,开拓思路,将所学内容融会贯通。每章末尾都精心编写了内容小结,浓缩了各章的精华,建议读者在解题过程中仔细体会,反复琢磨,这部分内容是作者在实践过程中归纳和总结出的经典技巧与解题法宝。在本书的最后给出了三组自测题,读者可以通过测试了解对《微积分》掌握的情况。

本书可作为文科各专业本、专科学生以及自考生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考书及文科考研强化复习的指导书。也可作为《微积分》课教师的教学参考书。

前　　言

《微积分》是解决文科数学问题的重要理论基础和实用工具，也是经济类各专业研究生入学考试的科目。为了帮助广大学生学习和掌握《微积分》课程的经典理论与解题方法，我们根据赵树嫄教授编写的《微积分》教材，编写了本辅导教材。

本辅导教材依照《微积分》教材中九章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：归纳总结了各章中的基本概念，主要定理以及相关推论，重要公式及解题技巧等，帮助学生整体把握各章的精髓。

习题全解：依据教材给出的习题，逐一进行详细解答，深入浅出，考虑到不同层次的需求，在解答过程中指出其依据及思考方法，从题目中归纳出解题技巧。解题的方法是灵活多样的，很多题目可以通过多种方法进行解答，在此，给读者留有思考的空间。

典型习题：在教材习题基础上，我们精心挑选了一些典型习题作为补充，帮助大家开拓思路，这些题目涉及内容广泛，技巧性强，具有代表性，可以激发思考空间，以不变应万变，更好的掌握与理解微积分的核心内容。

小结：根据各章的基本理论和习题及补充习题中出现的常见问题，对重要的解题方法与经验进行总结，帮助广大同学站在一个较高的位置上整体把握各章的理论精华与实践技巧，融会贯通，增强解决问题的能力，提高应试水平。

期末模拟试题：编写了三套模拟试题及配套答案，便于读者了解各章的重要知识点分布，检测本门课程的学习状况。

各部分内容均从基础入手，深入浅出，既适合初学者掌握基础知识也适用于考研及复习强化训练。

本教材由苗明川、杨蕤、潘大伟等同志编写，全书由周小平老师主审。周小平老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此深表感谢。

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正，以便再版时修正。

本书编写得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑、北京航空航天大学理学院教师的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！对《微积分》教材作者赵树嫄教授，表示衷心的谢意！

编　者

2006年1月8日

目　录

第一章　函　数

一、知识点概要

1. 集合的定义

（1）集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，用大写字母表示，如 A、B、C.

（2）构成集合的事物或对象，称为集合的元素，用小写字母表示，如 a、b、c.

2. 集合的分类(按照包含的元素的数量划分)

（1）有限集合：有限个元素构成的集合.

（2）无限集合：无限多个元素构成的集合.

3. 集合的表示法

（1）列举法

将集合的所有元素逐个列出，并用花括号{}括起来，不得遗漏和重复.

如 $A=\{a,b,c,d\}$

（2）描述法

设 $P_{(a)}$ 为某个与 a 有关的条件或作用法则，A 为满足 $P_{(a)}$ 的一切条件 a 的元素构成的集合.

记为 $A=\{a \mid P_{(a)}\}$

4. 全集与空集

（1）全集：由所考察的所有事物的全体构成的集合，记为 U.

（2）空集：不包含任何元素的集合，记为 Φ.

5. 子集

（1）子集的定义

如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，即"如果 $a\in A$，则 $a\in B$"，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或者 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

（2）集合相等的定义

集合 A 和 B,如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

6. 集合的运算

(1) 集合运算的定义

并:集合 A 和 B,由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并,记作 $A \cup B$.

交:集合 A 和 B,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交,记作 $A \cap B$.

差:集合 A 和 B,由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记作 $A - B$.

补:全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 A'.

(2) 性质

①$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

②$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

③ 对任何集合 A,有 $A \cup \Phi = A, A \cup U = U, A \cup A = A$.

④$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

⑤$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$.

⑥ 对任何集合 A,有 $A \cap \Phi = \Phi, A \cap U = A, A \cap A = A$.

⑦$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}$.

⑧$A' = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \overline{\in} A\}$.

⑨$A \cup A' = U, A \cap A' = \Phi$.

7. 集合运算律

(1) 交换律:(Ⅰ)$A \cup B = B \cup A$

(Ⅱ)$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律:(Ⅰ)$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(Ⅱ)$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律:(Ⅰ)$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(Ⅱ)$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 摩根律:(Ⅰ)$(A' \cup B') = A' \cap B'$

(Ⅱ)$(A' \cap B') = A' \cup B'$

8. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B,$x \in A$,$y \in B$,由所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合,称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A \times B$,即

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

9. 实数

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\(\text{可表示为有穷小数或无穷循环小数})\end{cases}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数(可表示为有穷小数或无穷循环小数)}\\\text{无理数(可表示为无穷不循环小数)}\end{cases}
$$

10. 绝对值：$|x|$ 表示数轴上点 x 与原点之间的距离

(1) $|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

(2) 性质：① $|x| = \sqrt{x^2}$

② $|x| \geqslant 0$

③ $|-x| = |x|$

④ $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

⑤ 如果 $a > 0$，则

$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$

⑥ 如果 $b > 0$，则

$\{x \mid |x| > b\} = \{x \mid x < -b\} \cup \{x \mid x > b\}$

⑦ $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

⑧ $|x-y| \geqslant |x| - |y|$

⑨ $|xy| = |x| \cdot |y|$

⑩ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$，　$y \neq 0$

11. 区间

设 a,b 为实数，且 $a < b$.

(1) 开区间 (a,b)：所有满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合.

(2) 闭区间 $[a,b]$：所有满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合.

(3) 半开区间 $(a,b]$（或 $[a,b)$）：所有满足不等式 $a < x \leqslant b$（或 $a \leqslant x < b$）的实数 x 的集合.

(4) $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$

(5) $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$

12. 邻域

(1) 点 x_0 的 δ 邻域:开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$

(2) 以 x_0 为中心,半径为 δ 的空心邻域: $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

13. 函数关系

(1) 函数的定义

若 D 是一个非空实数集合,对应法则为 f,对每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x),x\in D$.

(2) 定义域:集合 D,记作 $D(f)$.

(3) 值域:全体函数值的集合 $\{y \mid y=f(x),x\in D(f)\}$,记作 Z 或 $Z(f)$.

(4) 多值函数

非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的函数关系称为多值函数.

(5) 函数表示法:公式法、表格法、图形法.

(6) 分段函数:如 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

(7) 隐函数:用方程 $F(x,y)=0$ 表示因变量与自变量的对应规则.

14. 函数的几种简单性质

(1) 奇偶性

$\begin{cases} \text{奇函数:对所有的 } x\in D(f)\text{,有 } f(-x)=-f(x) \\ \text{偶函数:对所有的 } x\in D(f)\text{,有 } f(-x)=f(x) \end{cases}$

(2) 周期性

对于函数 $y=f(x)$,存在常数 $a,a>0$,使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立.

(3) 单调增减性: $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2.

① 单调递增:当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$

② 单调递减:当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$

(4) 有界性

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对于所有的 $x\in(a,b)$,如果存在一个正数

M,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

15. 反函数

设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数,值域为 $Z(f)$. 如果对每一个 $y \in Z(f)$,都有唯一的 $x \in D(f)$ 使 $f(x)=y$ 都之对应,对应规则记作 f^{-1},这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

16. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$,$Z(\varphi) \cap D(f)$ 非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数.

17. 初等函数

(1) 常值函数:$y=c$

(2) 幂指数函数:$y=x^a$(a 为任意实数)

(3) 指数函数:$y=a^x(a>0,a\neq 1)$

(4) 对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

(5) 三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x,$
$y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$.

18. 函数图形的简单组合与变换

(1) 迭加:$y=f(x)+g(x)$

(2) 翻转:$y=-f(x)$

(3) 放缩:$y=kf(x)$

(4) 平移:$y=f(x)+c$

二、习题(一)全解

(A)

1. 按下列要求举例:

(1) 一个有限集合;

(2) 一个无限集合;

(3) 一个空集;

(4) 一个集合是另一个集合的子集

解：

(1)VCD 机,DVD 机,录像机(包含 3 个元素)；

(2) 全体奇数(无限多个元素)；

(3) 小于 0 的正数(没有满足限定条件的元素)；

(4)1981 年 9 月 20 日出生的人,1981 年 9 月出生的人

(所有在 1981 年 9 月 20 日出生的人一定是在 1981 年 9 月出生的).

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合；

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

解：

用描述法描述集合时,应写清与集合中的元素有关的条件或法则.

(1)$A=\{x \mid x$ 为实数,且 $x>5\}$

(2)$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2<25\}$

(3)$A=\{(x,y) \mid y=x^2$ 且 $x-y=0\}$

注意：描述集合的具体形式时,应先写出集合中的元素所能抽象出的符号形式,然后再列出限制条件.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合；

(3) 集合$\{x \mid |x-1| \leqslant 5$ 的整数$\}$.

解：

根据给出的集合中元素满足的条件,确定集合中的所有元素,注意不能遗漏.

(1) 求解方程 $x^2-7x+12=0$ 的根,根据一元二次方程的求根公式可以求得方程的两个根分别为 $x_1=3,x_2=4$,则集合可表示为 $A=\{3,4\}$.

(2) 求两条曲线交点的问题表现在方程中,就是求方程组的根的问题,因此抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点为方程组

$$\begin{cases} y=x^2 & ① \\ y-x=0 & ② \end{cases} \quad \text{的根}$$

将 ② 式代入 ① 式,

得 $x=x^2$,则 $x_1=0,x_2=1$

则方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1 \end{cases}$$

因此,集合可表示为 $A=\{(0,0),(1,1)\}$.

(3) 根据绝对值的性质，可知

$A=\{x \mid |x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$

$=\{x \mid -5\leqslant x-1\leqslant 5, x$ 为整数$\}$

$=\{x \mid -4\leqslant x\leqslant 6, x$ 为整数$\}$

则 $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

4. 下列哪些集合是空集：

$A=\{x \mid x+1=0\}$，　$B=\{x \mid x^2+1=0, x$ 为实数$\}$，

$C=\{x \mid x>1$ 且 $x<0\}$，　$D=\{x \mid x>0$ 且 $x<1\}$，

$E=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3, x$、y 均为实数$\}$.

解：

由空集的定义，我们可知如果某集合为空集，则在与集合中元素相关的条件或法则下，不存在满足该条件或法则的元素.

(1)$A=\{x \mid x+1=0\}$，

则 $-1\in A, A\neq \Phi$

(2)$B=\{x \mid x^2+1=0, x$ 为实数$\}$，x 为实数时，$x^2\geqslant 0$，

$\therefore x^2+1\neq 0 \therefore B$ 中无满足条件的元素　　$\therefore B=\Phi$

(3)$C=\{x \mid x>1$ 且 $x<0\}$，

则在数轴上，如图 1－1.

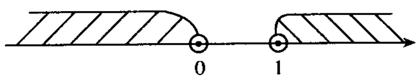


图 1－1

C 集合中的元素应为两个阴影部分的公共部分，从图 1－1 中看到，C 中无任何满足限制条件的元素，则 $C=\Phi$.

(4)$D=\{x \mid x>0$ 且 $x<1\}$ 在数轴上，D 集合中的元素应为图 1－2 中两个阴影部分的公共区域，易见，从 0 到 1 间的所有实数都满足条件

$\therefore D\neq \Phi$

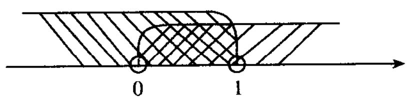


图 1－2

(5)$E=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3, x$、y 均为实数$\}$

求方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=3 \end{cases}$ 的解可转化为求曲线 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=3$ 的交点的问题，在同一坐标系中作出它们的

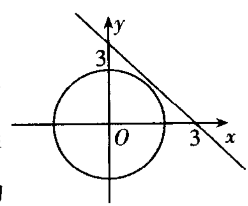


图 1－3

图象，由图 1－3 可知，两条曲线无交点，因此 $E=\Phi$.

5. 写出 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集.

解：

Φ 中不含任何元素，因此它是所有集合的子集，即 $\Phi\subset A$；

仅由一个元素组成的集合且为 A 的子集的集合有：$\{0\},\{1\},\{2\}$，

由两个元素组成的集合且为 A 的子集的集合有：$\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\}$，

由三个元素组成的集合且为 A 的子集的集合有：$\{0,1,2\}$，

$\therefore A=\{0,1,2\}$ 的一切子集为：$\Phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1,2\}$.

6. 如果 $A=\{0,1,2\},B=\{1,2\}$，下列各种说法，哪些是对的？哪些不对？

$1\in A,0\overline{\in}B,\{1\}\in A,1\subset A,\{1\}\subset A,0\subset A,\{0\}\subset A,\{0\}\subset B,A=B$,

$A\supset B,\Phi\subset A,A\subset A$.

解：

集合中的元素与集合之间是属于或不属于的关系，应用符号“$\in$”和“$\overline{\in}$”来表示，如 $1\in A$，而集合与集合之间的关系是包含或不包含的关系，应该用 $\subset$（或 $\supset$）和 $\not\subset$ 表示.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时，有 $A=B$.

因此正确的说法有：$1\in A,0\overline{\in}B,\{1\}\subset A,\{0\}\subset A,A\supset B,\varnothing\subset A,A\subset A$，其余都不正确.

7. 设 $A=\{1,2,3\},B=\{1,3,5\},C=\{2,4,6\}$ 求：

(1)$A\cup B$　(2)$A\cap B$　(3)$A\cup B\cup C$

(4)$A\cap B\cap C$　(5)$A-B$

解：

这道题的求解主要依据集合交、并、差运算的定义：

交运算的结果应该是由两个集合的所有公共元素组成的集合；

并运算的结果是由两个集合的所有元素构成的集合；

差运算的结果是属于第一个集合而不属于第二个集合的所有元素组成的集合.

(1)$A\cup B=\{1,2,3,5\}$，

注意：列举法表示集合时，集合中的元素不应重复或遗漏.

(2)$A\cap B=\{1,3\}$，

(3)$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$，

(4)$A\cap B\cap C=\Phi$，

(5)$A-B=\{2\}$.

8. 如果 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么，A',B'，$A-B,(A\cup B)',(A\cap B)'$ 各表示什么样人的集合？

解：

本题应立足补运算的基本概念，从定义出发，结合交、并、差运算规则进行求解.