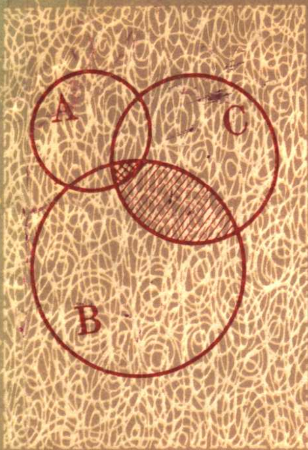


彭树森 编

集 合

集　合

彭树森　编

黑龙江人民出版社

1979年·哈尔滨

集　合

彭树森　编

黑龙江人民出版社出版
(哈尔滨市道里森林街14—5号)
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32·印张1 14/16·字数37,000
1979年9月第1版　　1979年9月第1次印刷
印数1—80,000

统一书号：13093·16　　定价：0.17元

出 版 说 明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《集合》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，按集合的概念、两个集合间的关系、集合的运算、集合运算的性质、一一对应和势的概念、可列集与不可列集、映象与函数等部分，比较全面地、系统地讲述了集合论的初步知识。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中、小学教师学习参考。

目　　录

整个近代数学都是以集合论为基础的，十九世纪以前，数学并不包括集合论的内容，由于实践和科学的发展使集合论诞生了。它一出现就使数学发生了很大的变化，现在集合的概念已经与数的概念同样重要，成为现代数学的基础。

集合论与以前学过的数学知识有着密切的关系。它一方面与所学过的数学知识有着许多相似之处，另一方面又有自己奇异的特性。例如，集合也象数一样可以建立运算，可是集合的运算却有自己独特的性质；再如，在过去学习的数学知识中，只研究有限个东西的数量关系，那时可能认为整体中所含东西的数量多于部分所含东西的数量是天经地义的，可是在集合论中将要研究无限多个东西的关系，在集合论中你会出乎意料看到整体中所含东西（个体）的数量也不一定多于整体中的部分所含东西的数量。

更为重要的是，自从集合论出现以后，集合论的方法使人们对过去的数学知识有了更深刻的认识。从集合论出现以后，它很快就逐渐渗透到各个数学分支，改变了一些数学学科的面貌。并且在它出现以后又相继产生了一些后继的数学分支，这些新的数学分支构成了近代数学的基础，在实践中都是有效的数学工具。因此，尽早了解和掌握集合论的初步知识及思考方法自然是十分必要的。

一　集合的概念

“集合”是一个比较原始的概念，它不是用其他的数学概念给出的，而是在实践中直接产生的。但是，要对它给出严格的数学定义，使之在运用中没有逻辑矛盾，却又是一件很困难的事情。这一问题属于数学基础的研究范围。这里，只想用朴素的数学观点来说明集合的涵义，以达到弄清集合的概念。

1.什么是集合

生活中常用“总合”、“总体”或“全体”等词汇来表示某些完全确定的事物。譬如说：教室中同学的全体；草原上白色羊群的总合；周长为50米的长方形的总合；小于100的自然数的总合等等，这些都可以说是集合。在数学中我们用“**集合**”或“**集**”来代替总合、总体、全体等概念。因此，上述各例都是集合的例子。可见，集合就是由总括某些完全确定的个体为一个整体而产生的概念。简单地说：

集合就是完全确定的某些个体的总合。

在这个描述性的朴素概念中，以下几点是值得注意的：

第一，这里说某些个体的“个体”一词时，只要它是可以思考或可以观察的对象，只要它是可以并且能够加以区分异同的个体就可以，不管它是具体的事物还是抽象的事物，也不管它是数还是非数的其他东西。例如，我们说教室里桌子

的集合，就是指教室里桌子的总合，这里每个个体就是桌子，这是由具体实物构成的集合。我们说，1到50的自然数的集合，就是指1到50的五十个正整数的总合，这里每个个体就是抽象的数。再譬如说，某个五次代数方程的实数解的集合，这就是指满足该方程的实数的全体，这里每个个体就是满足方程的实数。

第二，在说明集合概念时，所要求的是它完全确定的个体的总合，而不是它组合的形式。即只要求它们是可以区分开的个体，而不管每个个体间是依怎样的关系组合成的。比如说，十个人构成的集合与十个桌子构成的集合，是两个不同的集合。可是，十个人排成一行组成的十人集合，与这十个人围成一圈所成的集合，因为是同样的十个人的全体，所以就认为是相同的集合。因此，从这个意义上看，粗略地说，集合颇有“乌合之众”的意思，我们只关心的是“众”，并不关心它是怎样“乌合”起来的形式。

第三，在说明集合概念时，我们用了“完全确定的某些个体”的说法，这就意味着组成集合的个体是依照某种方式给定的。这一点特别值得注意。一谈到“某些”个体，自然就意味着对组成集合的个体有一定的取舍。也就是说，当你面前有某一个体和某一集合时，这一个体与这个集合之间就有属于这个集合或不属于这个集合两种可能的关系。自然，对于任何事物，如果都能确定它属于或者不属于这个集合时，那么所说的某些个体的某些就自然是确定的了，这时集合就被明确给出来了。因此，必须有一个判断个体是否属于集合的准则。根据这个准则，集合就可以完全确定，这时才认为集合是明确存在了。怎样给出这样一个判断准则呢？通常情形下，如果不是对集合个体明确具体地指出时，这个判别的

准则往往是由给定集合时对个体应具有的性质做为要求而给出的。只要这个要求是明确给出的，那么集合的个体就可以完全确定，集合也就被明确给出了。

例如，我们说"教室里桌子的集合"。那么某一个体是否属于这个集合，就看它是否在教室里和它是不是桌子，这两条就是鉴别一个个体是否属于这个集合的准则。我们说"教室里学生的集合"，这时某一个体对于这一集合属于或不属于的关系，就是由在教室里和是学生这两条来判断的。教室里的学生属于这一集合，教室里的教师就不属于这个集合，教室外面的学生也不属于这个集合。再譬如说，不等式 $|x-3|\leqslant 4$ 的整数解的集合，就是要看一个数是否满足不等式和它是否是整数这两条来确定。整数 10 不满足不等式，所以 10 不属于这个集合；3.8 满足不等式，但它不是整数，所以也不属于这个集合。属于这个集合的个体只有 -1、0、1、2、3、4、5、6、7 这九个数，它们是构成这个集合的个体。

因此，在上述的这种情形下，也常说：**集合就是具有某些共同性质**（或说具有某些共同特征）**的事物的全体**。这时个体对于集合属于或不属于的关系，就是由个体是否具有所要求的某些性质来判断的，具有给定性质的个体都在这个集合中，在这个集合中的个体也都具有给定的性质。

第四，从上面的解释可以看出，给定某个集合时，并不要求一定得指出它的个体来给出，而且还可能有不含个体的集合。比如，我们说方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合。这里已明确给出了判断个体是否属于集合的准则，根据这一准则，对任何个体都可以判断它是否属于这个集合，所以按照集合概念的意义，这个集合就完全确定了。可是，由于任何实数都不满足这一方程，所以这个集合中就一个个体也没有。尽

管如此，这一集合仍然被认为是确定的。对于这种不含任何个体的集合，称之为**空集合**，简称**空集**。空集合当然也是集合。

2. 集合的表示法

在集合论中，也如同在代数学中使用文字符号一样，用文字符号表示集合及个体。

通常用大写的字母 A、B、C、X、Y…表示集合。空集合一般都用 Φ 表示。

用小写字母 a、b、c、x、y…表示组成集合的个体。并且称集合中的每个个体为集合的元素。

一个个体 a 与一个集合 A 之间的两种关系一般用如下的写法表示：

a 属于 A，用符号 $a\in A$ 表示，读作 a 属于 A，这时表示 a 是 A 的元素。

a 不属于 A，用符号 $a\overline{\in} A$ 表示，读作 a 不属于 A，这时表示 a 不是 A 的元素。

例如，设 A 是小于 50 的偶数集合。则有 $2\in A$，$14\in A$，$15\overline{\in} A$，$60\overline{\in} A$。

值得注意的是，集合中的元素是不重复的，重复的只看作同一个元素。例如，数列 2，3，2，5，3，这个数列有五项，但是做为集合它的元素只有 2、3、5 三个，而不是五个。

在集合论中，如果一个集合的元素只是有限个，也就是说组成集合的元素个数可以用计数方法数出时，则称这类集合为**有限集**；组成集合的元素不是有限个时，这时称为**无限集**。

大写字母 A、B…只是一个集合的表示符号，它不能明确地表示这个集合是由哪些个体组成的。怎样表示出一个集

合的组成情况呢？通常有如下两种表示方法：

(1) **列举法** 在某些情形中，如果集合的元素能明确知道并且可以一一列举出来时，那么直接将这些元素都列举出来，明确地表示这个集合，这种表示集合的方法称为列举法。

例如：用列举法表示"所有小于15而且能被3整除的正整数的集合"。这个集合的元素只有3、6、9、12这四个元素。如果用A表示这个集合，则A可以用列举法表示如下：

$$A=\{3,6,9,12\}.$$

这里等式左端是表示集合的符号，右端则是表示集合的组成情况，花括号用来表示A是这些元素总合的意思。

列举法能清楚看到集合的所有元素，对集合组成情况一目了然。所以，对某些无限集合，只要采用列举法也能表示并且可以被人理解时，常常也用列举法写出。

例1 自然数集合N，可表示为：

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

偶数集合M，可表示为：

$$M=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

奇数集合K，可表示为：

$$K=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}.$$

其中n皆为自然数。

(2) **描述法** 用列举法表示集合虽然具有明确清楚的优点，但是一般情况下要把集合元素一一列举出来往往是办不到的，而且有时既或可以办到但写起来也很不方便。因此，通常多用描述出集合元素的共同性质，即写出判断个体是否属于集合的准则。这种用描述集合元素共同性质来表示集合的方法称为描述法。

例2 小于100的自然数集合A，可表示为：

$$A=\{n|n\text{ 为自然数，}n<100\}.$$

这里，n 表示属于 A 的元素，是个体的记号，符号“|”的右侧表示对集合 A 的元素所要求具有的性质。

例 3 满足不等式 $x^2+2x-8>0$ 的实数集合，可表示如下：

$$A=\{x|x\text{ 为实数，且 }x^2+2x-8>0\}.$$

在没有求出不等式解之前，这样表示就可以。如果解出此不等式，该集合也可表示为：

$$A=\{x|x<-4\text{ 或 }x>2\}.$$

例 4 写出满足方程 $x^2+2x-3=0$ 的实数集合。

解 用 A 表示所求集合。用描述法可表示为：

$$A=\{x|x\text{ 为实数，}x^2+2x-3=0\}.$$

用列举法可表示为：

$$A=\{-3,1\}.$$

方程或不等式的所有解的全体，可叫做方程或不等式的**解集合**。

练 习 题 一

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 我国中央直辖市的集合；

(2) 算术运算的集合；

(3) 不大于 15 的质数的集合；

(4) $x^2=0$ 的解集合；

(5) 满足不等式 $20-x>0$ 的合数的集合。

2. 用两种方法表示出下列解集合（在实数范围内）：

(1) $7x-5=0$；

(2) $x^2-2x-15=0$；

(3) $x^2-x+2=0$;

(4) $\log_2 x=3$;

(5) $x^2+3x-10>0$。(此题只用描述法)

注：用列举法表示空集记为{ }.

3. 试用集合的思想和术语给出下列几何图形的定义：

(1) 线段 AB 的垂直平分线；

(2) 角 A 的平分线；

(3) 以 O 点为圆心以 R 为半径的圆。

二 两个集合间的关系

在数的研究中，任意两个实数 x 与 y 之间存在着三种关系：

$$x=y, \text{ 或者 } x>y, \text{ 或者 } x<y,$$

三者有而且只有一个成立。现在引进数学中的一个新概念，那么任意两个集合之间有怎样的关系呢？

1. 包 含 关 系

设有两个集合 A 与 B，如果集合 A 的每个元素也都是集合 B 的元素，那么就说集合 B 包含集合 A。记作：

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A.$$

读作：“A 被 B 包含”或“B 包含 A”。

例 1 设集合 $A=\{2,3\}$；$B=\{1,2,3,5\}$。

则有 $$A\subseteq B.$$

例 2 设集合 $N=\{n|n \text{ 为自然数}\}$；

$$M=\{m|m\text{ 为偶数}\}.$$

因为 $$N=\{1,2,3,4,5,6\cdots,n,\cdots\};$$

$$M=\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}.$$

可见有 $$M\subseteq N.$$

上面两个例子，由于集合的元素比较直观，容易看出两个集合之间的包含关系．但是，很多情况下并不这样明显．怎样判别两个集合间是否存在包含关系呢？

我们知道，如果集合是由对个体所要具有的性质要求来给出时，那么判别某一个体是否属于集合，就只要用这一给定的性质来判断就可以．可见，在这种情况下，要判定集合 A 是否包含集合 B，就是要检验集合 B 的元素是否具有集合 A 对元素所要求具有的性质．也就是说，如果一个元素具有集合 B 对元素要求具有的性质一定能推出该元素也具有集合 A 对元素要求具有的性质时，那么集合 A 就包含集合 B．这一结论可用以下方式叙述：

设集合 $A=\{a|a\text{ 具有性质 }P(A)\}$；

$$B=\{b|b\text{ 具有性质 }P(B)\}.$$

如果个体 x 具有性质 $P(B)$ 必有 x 具有性质 $P(A)$ 时，则有

$$A\supseteq B\text{ 成立.}$$

或者说，如果命题 $P(B)$ 成立必可推出命题 $P(A)$ 也成立时，则有 $A\supseteq B$ 成立．

根据上述结论，在这种情况下，检验集合 A 与集合 B 的包含关系，只要研究给定集合时所要求具有的性质之间的关系就可以了．

例 3 设 $A=\{a|a\text{ 为能被 3 整除的自然数}\}$，$B=\{b|b\text{ 为能被 6 整除的自然数}\}$，问集合 A 与 B 间有无包含关系？

解 因为一个数如果能被 6 整除时必然也能被 3 整除，

所以如果 $x\in B$ 时，必然有 $x\in A$，因此有 $A\supseteq B$ 成立。

值得注意的是，按照包含关系的定义，对任意一个集合 A，显然皆有 $A\subseteq A$ 成立。

定义 两个集合 A 与 B 之间，如果有 $A\subseteq B$ 成立，则称集合 A 为集合 B 的**子集**。

定义 两个集合 A 与 B 之间，如果有 $A\subseteq B$，并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 为集合 B 的**真子集**。记作：

$$A\subset B.$$

在集合论中规定空集合 Φ 可以看作是任何集合的集子。

2. 相　等　关　系

定义 如果集合 A 与 B 由完全相同的元素组成，则称集合 A 与 B 相等。记作：

$$A=B.$$

怎样判断两个集合是否相等呢？当两个集合都是有限集时，自然可以先将其所含元素确定后再逐个比较即可。

例 4 方程 $x^2+3x+2=0$ 的解集合 A 与集合 $B=\{-1,-2\}$ 是相等的，即 $A=B$ 成立。

对于一般情况，根据集合相等及集合包含关系的定义可知，要证明 $A=B$ 成立，只要证明 $A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 同时成立即可。因此，要判断 A 与 B 是否相等，必须根据包含关系检验两次。

例 5 试证有两个角相等的三角形的集合与有两个边长相等的三角形的集合相等。

证明 设 $A=\{x|x$ 为两个角相等的三角形$\}$，

$B=\{y|y$ 为有两个边长相等的三角形$\}$。

先证 $A \subseteq B$。

设 $x \in A$。则 x 为有两角相等的三角形，因此 x 为等腰三角形，故 x 为有两个边长相等的三角形。从而有 $x \in B$ 成立。由于 x 为 A 的任意一个元素，可知有 $A \subseteq B$ 成立。

再证 $A \supseteq B$。

设 y 为 B 的任意一个元素，则 y 为有两个边长相等的三角形，即 y 为等腰三角形。因此，y 是有两个角相等的三角形，从而有 $y \in A$ 成立。由于 y 为 B 中任意元素，则有 $B \subseteq A$ 成立。

综上可知 $A = B$ 成立。

值得注意的是，在数的大小关系中，对于任意两个实数，在“$>$”、“$<$”或“$=$”的关系中必有并且只有一个关系成立。但在两个集合间的包含与相等关系中，两个集合之间可能不存在包含关系，自然这时也不能相等。例如，若集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{2, 3\}$，则 A 与 B 间就无包含关系。所以集合并不是都能比较“大小”的。

3. 完全集合及其子集

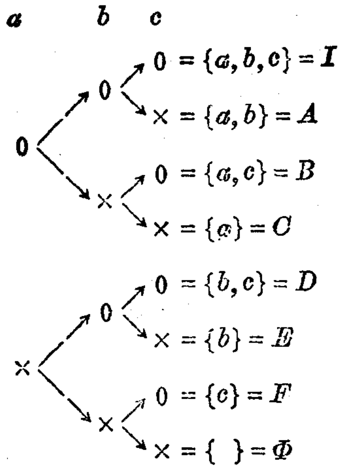
定义 具有某种性质的全部个体所组成的集合，称为具有该性质的个体的**完全集合**。记作：I．

I 的某些元素组成的集合称为 I 的**子集合**（或部分集合）。

值得注意的是，关于集合的关系的研究主要是关于某一完全集合中子集合间关系的研究。通常称完全集合中子集的集合为该完全集合的**子集类**。

例 6 试求集合 $I = \{a, b, c\}$ 的子集合有哪些。

解 可以按下列方法求出 I 的所有子集合。



所以，I 的子集共有 $2^3=8$ 个，其中除 I 和 Φ 之外，由 I 中两个元素组成的子集有 $C_3^2=3$ 个，由 I 中一个元素组成的子集有 $C_3^1=3$ 个。

可以证明，如果一个完全集合是由 n 个元素组成，那么它所含子集数为 2^n 个，其中包含 $n-1$ 个元素的子集有 C_n^{n-1} 个，包含 $n-2$ 个元素的子集有 C_n^{n-2} 个，……包含一个元素的子集有 C_n^1 个。

练 习 题 二

1. 判断下列各集合间有无包含关系：

(1) $A=\{0,3\}$ 与 $B=\{x|x$ 为实数，$x^2-x+1=0\}$；

(2) 20 以内的质数集合与 $15-x>0$ 的正整数解的集合；

(3) 对角线互相平分的四边形的集合与对边平行且相等的四边形的集合；

(4) $A=\{x|x=7$ 或者 x 为小于 5 的质数$\}$ 与 $B=\{y|y$ 为