Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

实变函数与泛函分析

学习指导

魏国强　胡善文　编

高等教育出版社

数学类专业学习辅导丛书

实变函数与泛函分析学习指导

魏国强　胡善文　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与高等教育出版社出版的程其襄等编写的《实变函数与泛函分析基础》(2003 年第二版)配套的学习指导书。按照教材体例,逐章对应编写。每章包括内容小结、学习要点、例题选讲、习题解答和补充习题五部分。书末给出补充习题的详细提示。

本书可作为师范院校数学系各专业学生、自学读者、函授学员以及其他高等院校有关读者学习实变函数与泛函分析的辅导书,也可以作为教师授课的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

实变函数与泛函分析学习指导/魏国强,胡善文编.
—北京:高等教育出版社,2004 11
ISBN 7-04-015555-9

Ⅰ 实 Ⅱ ①魏 . ②胡 Ⅲ.①实变函数-高等学校-教学参考资料②泛函分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099867 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www hep edu cn
总　　机	010-58581000		http://www hep com cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京泽明印刷有限责任公司		
开　　本	850×1168 1/32	版　　次	2004 年 11 月第 1 版
印　　张	6 875	印　　次	2004 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	10 70 元

物料号:15555-00

前　　言

本书是与高等教育出版社出版的程其襄等编写的《实变函数与泛函分析基础》(2003年第二版)配套的学习指导书。本指导书是对应教材各章编写的。每章分为五部分:

1. 内容小结——小结该章中的基本概念、基本定理及基本证题方法;

2. 学习要点——提出该章中的重点或难点,以引起读者注意,并对难点作较详尽的说明;

3. 例题选讲——选择例题,通过解题示范介绍解题的基本方法和一定的证题技巧;

4. 习题解答——请读者正确使用本书给出的教材中各章习题详细解答,一定不要先看本书的解答再做习题;

5. 补充习题——请读者在学完每章后,利用补充习题检查自己对基本概念和基本理论的掌握情况,衡量自己的解题能力。

本书由魏国强组织编写,并且编写了实变函数部分,泛函分析部分由胡善文编写。在编写与出版过程中,得到华东师范大学数学系和高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

编　　者

2004年3月于华东师范大学

目 录

第一篇 实变函数

第二篇 泛函分析

第一篇

实变函数

原书空白页

第一章　集　合

集合的概念是19世纪70年代由康托尔首先导入的，而后集合的观点和方法立即迅速渗透到数学的各个分支，从而改变了数学的面貌，它对现代数学的发展起了巨大的推动作用．实变函数及泛函分析也是在集合论的观点和方法渗透入数学分析的基础上产生的．

本章介绍了一些集合理论，主要是为了本课程的需要，但也为读者学习其他近代数学理论作一些准备．

一、内容小结

1．这一章复习了集合的概念、表示方法、集合的运算（并、交、差、补）；引入了集合列的上极限与下极限和极限的运算；对集合运算规则作了仔细的讨论，特别是德摩根公式．

2．引入了集合对等的概念，证明了判别两个集合对等的有力工具——伯恩斯坦定理．

3．引入了集合基数的概念，深入地研究了可数基数和连续基数．

二、学习要点

1．必须准确熟练地掌握集合的运算法则，特别要注意集合运算既有和代数运算在形式上有许多类似的公式，但也有许多本质

不同的公式.读者千万不要不加证明地把代数恒等式搬到集合运算中来.例如,在代数运算中有等式$(a+b)-a=b$,但对集合A及B,等式$(A\cup B)-A=B$却不一定成立,这个等式成立的充要条件为A与B不相交.

2. 可数集是所有无限集中基数最小的无限集,这一点必须引起注意.所以从一无限集中去掉一个可数子集后,若剩下的仍为无限集,则剩下无限集的基数与原无限集的基数相等.类似地,无限集并上一可数集后,其基数也不变.

3. 存在不可数无限集.事实上,没有最大的基数.

以下介绍学习本章时读者应掌握的论证方法.

4. 学习本书中的概念既要从肯定方面又要从否定方面加以考虑,这样不但能对概念加深理解,并能在此基础上总结出论证某些问题的基本思路与方法.例如,设A、B是两个集合,若已知对每个A中的元素x,必有$x\in B$,则由集合的包含定义,有$A\subset B$.但若已知任何不属于B的元素x必不属于A,同样也可得到$A\subset B$.于是,要证$A\subset B$,既可以证明对任何$x\in A$,必有$x\in B$;也可以证明对任何$x\overline{\in}B$,必有$x\overline{\in}A$得到.同样的例子还有很多,希望读者在学习基本概念时加以注意和总结.

5. 一列集合的上限集、下限集及极限是用集合运算来解决分析中许多问题的基础,应该很好地掌握.对上限集与下限集有两种不同的描述方法.一种是用语言描述,例如,集列$\{A_n\}$的上限集是由属于$\{A_n\}$中无限多个集的那种元素的全体所组成的集;$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$也可用集合运算描述:$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.前者便于分析问题,后者便于用集合运算解决问题.类似地,对下限集也有两种不同的描述方法.读者应学会把一些分析问题转化为用上限集和下限集表述的能力,这在第四章中是特别重要的.

6. 对集合基数部分的学习,应注意论证集合对等的基本技能的训练.证明集合A与B对等的基本方法可分为三种:一是根据

对等的定义,直接构造两集合间的1—1对应;二是利用对等的传递性,即欲证 $A\sim C$,此时已知 $A\sim B$,于是只需证明 $B\sim C$ 即可;三是利用伯恩斯坦定理,即欲证 $A\sim B$,只要证 A 与 B 各与对方一子集对等即可.

7. 要学会证明一个集合是可数集.其方法一是将集合 A 中元素排成一个无穷序列;二是设法使 A 与一已知可数集,例如与有理数集或有理端点区间所成集等等对等;三是利用有限或可数个可数集的并仍为可数集等可数集运算性质;四是利用§4中定理6.

8. 证明一集合 A 的基数为 c 时常常用到区间、$\mathbf{R}^n$、E_∞ 的基数为 c,也常常设法把 A 与 p 进位无穷小数对等.

三、例题选讲

例1 证明 $A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

证法一 先证明左式$\subset$右式.设 $x\in A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$,则 $x\in A$ 或$x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$,若 $x\in A$,则对一切 $\alpha\in I$,有 $x\in A\cup B_\alpha$,所以 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$;若 $x\overline{\in} A$,则由 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$,可得对任何 $\alpha\in I$,有 $x\in B_\alpha$,所以 $x\in A\cup B_\alpha$,因此 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$,因而左式$\subset$右式.

再证右式$\subset$左式.设 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$,则对任何 $\alpha\in I$,都有 $x\in A\cup B_\alpha$,因此 $x\in A$ 或$x\in B_\alpha$.若 $x\in A$,则 $x\in A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$;若 $x\overline{\in} A$,则 $x\in B_\alpha$ 对任何 $\alpha\in I$ 成立,所以 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\subseteq A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$,即右式$\subset$左式.

综上得结论成立.

证法二 先证左式$\subset$右式. 设 $x \overline{\in} \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$,则存在 $\alpha_0 \in I$,使 $x \overline{\in} A \cup B_{\alpha_0}$,由于 $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) \subset A \cup B_{\alpha_0}$,故 $x \overline{\in} A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)$,所以左式$\subset$右式.

再证右式$\subset$左式. 若 $x \overline{\in} A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)$,则 $x \overline{\in} A$ 且 $x \overline{\in} \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$,因此存在 $\alpha_0 \in I$,使 $x \overline{\in} B_{\alpha_0}$. 所以 $x \overline{\in} A \cup B_{\alpha_0}$,因而 $x \overline{\in} \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$,所以右式$\subset$左式. 由此得结论成立.

证法三 显然,对任何 $\alpha \in I$,恒有 $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) \subset A \cup B_\alpha$,因此由交的定义,有 $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$;反之,若存在 $x \in \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$,但 $x \overline{\in} A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)$,则由证法二,知 $x \overline{\in} \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$. 这与假设矛盾.

证法四 由德摩根公式及§1 的定理 1(3),

$$\begin{aligned} \complement(\bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)) &= \bigcup_{\alpha \in I} \complement(A \cup B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I}(\complement A \cap \complement B_\alpha) \\ &= \complement A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} \complement B_\alpha) = \complement A \cap \complement(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) \\ &= \complement(A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)). \end{aligned}$$

所以 $\bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha) = A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)$.

例 2 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数列. 试用点集 $\left\{x \,\middle|\, f_j(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}$, $k = 1, 2, \cdots$ 表示点集 $\{x \mid \overline{\lim_{j \to \infty}} f_j(x) > 0\}$.

解
$$\begin{aligned} \{x \mid \overline{\lim_{j \to \infty}} f_j(x) > 0\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{j=N}^{\infty} \left\{x \,\middle|\, f_j(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim_{j \to \infty}} \left\{x \,\middle|\, f_j(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}. \end{aligned}$$

事实上，设 $x_0\in\{x\mid\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}$. 则存在 k_0，使 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x_0)>\frac{1}{k_0}$. 再由数列上极限定义，对任何正整数 N，存在 $n_N>N$，使 $f_{n_N}(x_0)\geqslant\frac{1}{k_0}$，因此 x_0 属于集列 $\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k_0}\right.\right\}j=1,2,\cdots$ 中无限多个集，从而 $x_0\in\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k_0}\right.\right\}$，所以 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k}\right.\right\}$.

反之，若 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k}\right.\right\}$，则存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使 $x_0\in\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k_0}\right.\right\}$. 因此对任何正整数 N，都有 $x_0\in\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k_0}\right.\right\}$. 所以存在 $n_j\geqslant N$，使 $x_0\in\left\{x\left|f_{n_j}(x)\geqslant\frac{1}{k_0}\right.\right\}$，因而 $f_{n_j}(x_0)\geqslant\frac{1}{k_0}$，所以 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x_0)\geqslant\frac{1}{k_0}>0$，即 $x_0\in\{x\mid\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}$.

综上即得

$$\{x\mid\overline{\lim_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim_{j\to\infty}}\left\{x\left|f_j(x)\geqslant\frac{1}{k}\right.\right\}.$$

例 3 设有集合 A、B 和 C，试证明：

(1) 若 $(A\setminus B)\sim(B\setminus A)$，则 $A\sim B$；

(2) 若 $A\subset B$ 且 $A\sim(A\cup C)$，则 $B\sim(B\cup C)$.

证明 (1) 因 $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing$，$(B\setminus A)\cap(A\cap B)=\varnothing$，$A\cap B\sim A\cap B$，所以

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\sim(B\setminus A)\cup(A\cap B)=B$$

(2) 因 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B\setminus A)$. 另一方面，$B\cup C=[A\cup(C\setminus B)]\cup(B\setminus A)$，并且 $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$，$[A\cup(C\setminus B)]\cap(B\setminus A)=\varnothing$，再由 $A\subset A\cup(C\setminus B)\subset A\cup C$ 及条件 $A\sim$

$A\cup C$,有 $A\sim A\cup(C\setminus B)$,又因 $B\setminus A\sim B\setminus A$,所以 $B\sim(B\cup C)$.证毕.

例 4 作出实数全体与无理数全体间的 1—1 映射.

解 在 $\mathbf{R}$ 中取出可数子集 $A=\{e,e^2,e^3,\cdots,e^n,\cdots\}$,则 $A\cup\mathbf{Q}$ 也是可数集,其中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数全体.所以 $A\cup\mathbf{Q}\sim A$,因而存在 A 到 $A\cup\mathbf{Q}$ 上的 1—1 映射,例如,设 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$,则可取

$$\varphi(e^{2k-1}) = e^k,\varphi(e^{2k}) = r_k,k = 1,2,\cdots$$

则 φ 是 A 到 $A\cup\mathbf{Q}$ 上的 1—1 映射.令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\in\mathbf{R}\setminus(A\cup\mathbf{Q}) \\ \varphi(x), & x\in A \end{cases}$$

则 f 是 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 1—1 映射.

例 5 设 $E\subset\mathbf{R}$ 是不可数的无限集.令

$$D = \{x \mid x\in E \text{ 且 } \forall\delta>0,$$
$$(x-\delta,x+\delta)\cap E \text{ 是不可数无限集}\},$$

试证 D 是不可数无限集.

证明 先证 $E\setminus D$ 为至多可数集.事实上,对任意 $x\in E\setminus D$,由 D 的定义,存在 $\delta>0$,使 $(x-\delta,x+\delta)\cap E$ 至多是可数集,由于 $x\in E$,所以存在有理数 r_x' 与 r_x'',使 $x-\delta<r_x'<x<r_x''<x+\delta$,于是 $(r_x',r_x'')\cap E$ 也至多可数.但 $\{(r_x',r_x'')\mid x\in E\setminus D\}$ 至多为可数集,设

$$\{(r_x',r_x'')\mid x\in E\setminus D\} = \{(r_{x_1}',r_{x_1}''),(r_{x_2}',r_{x_2}''),\cdots,(r_{x_n}',r_{x_n}''),\cdots\},$$

则

$$E\setminus D\subset\bigcup_{x\in E\setminus D}[(r_x',r_x'')\cap E] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[(r_{x_n}',r_{x_n}'')\cap E].$$

由于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[(r_{x_n}',r_{x_n}'')\cap E]$ 为有限个或可数个至多可数集的并,所以仍为至多可数集.因此 $E\setminus D$ 是至多可数集.于是 $D=E\setminus(E\setminus$

D)为无限不可数集.证毕.

四、习题解答

1. 证明:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明 设$x\in A\cup(B\cap C)$.若$x\in A$,则$x\in A\cup B$,$x\in A\cup C$,从而$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

若$x\in B\cap C$,则同样有$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$,得$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,因此

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

设$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.若$x\in A$,当然有$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.若$x\overline{\in}A$,由$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$,可知$x\in B$且$x\in C$,所以$x\in B\cap C$,同样有$x\in A\cup(B\cap C)$,因此$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$.所以$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.证毕.

2. 证明:

(1) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$;

(3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(4) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(5) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(6) $A-(A-B)=A\cap B$.

证明 (1) $A-(A\cap B)=A\cap \complement_S(A\cap B)$

$$=A\cap(\complement_S A\cup\complement_S B)$$

$$=(A\cap\complement_S A)\cup(A\cap\complement_S B)$$

$$=A-B.$$

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\complement_S B$$

$$=(A\cap\complement_S B)\cup(B\cap\complement_S B)$$

$$= A - B;$$

(2) $$(A\cap B)-(A\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cap \complement_S(A\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cap(\complement_S A\cup \complement_S C)$$
$$=(A\cap B\cap \complement_S A)\cup(A\cap B\cap \complement_S C)$$
$$=A\cap(B\cap \complement_S C)=A\cap(B-C);$$

(3) $(A-B)-C=(A\cap \complement_S B)\cap \complement_S C$
$$=A\cap \complement_S(B\cup C)$$
$$=A-(B\cup C);$$

(4) $A-(B-C)=A-(B\cap \complement_S C)$
$$=A\cap \complement_S(B\cap \complement_S C)$$
$$=A\cap(\complement_S B\cup C)$$
$$=(A\cap \complement_S B)\cup(A\cap C)$$
$$=(A-B)\cup(A\cap C);$$

(5) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap \complement_S B)\cap(C\cap \complement_S D)$
$$=(A\cap C)\cap \complement_S(B\cup D)$$
$$=(A\cap C)-(B\cup D);$$

(6) $A-(A-B)=A\cap \complement_S(A\cap \complement_S B)$
$$=A\cap(\complement_S A\cup B)=A\cap B.$$ 证毕.

3. 证明：$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；
$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证明 $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap \complement_S C$
$$=(A\cap \complement_S C)\cup(B\cap \complement_S C)$$
$$=(A-C)\cup(B-C);$$

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap \complement_S B)\cap(A\cap \complement_S C)$
$$=A\cap \complement_S B\cap \complement_S C$$
$$=A\cap \complement_S(B\cup C)$$

$$= A - (B \cup C).$$ 证毕.

4. 证明：$\complement_S\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \complement_S A_i$.

证明 设 $x \in \complement_S\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$，则 $x \in S$，但 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，因此对任意 i，$x \overline{\in} A_i$，所以 $x \in \complement_S A_i$，因而 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \complement_S A_i$.

设 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \complement_S A_i$，则对任意 i，$x \in \complement_S A_i$，即 $x \in S$，$x \overline{\in} A_i$，因此 $x \in S$，但 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，得

$$x \in \complement_S\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

所以 $\complement_S\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \complement_S A_i$. 证毕.

5. 证明：

(1) $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) - B = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha - B)$;

(2) $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) - B = \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha - B)$.

证明 (1)
$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) - B = \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \cap \complement_S B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap \complement_S B)$$
$$= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha - B);$$

(2)
$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) - B = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \cap \complement_S B = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap \complement_S B)$$
$$= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha - B).$$

证毕.

6. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，作 $B_1 = A_1$，$B_n = A_n - \left(\bigcup\limits_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\right)$，$n >$

1.证明$\{B_n\}$是一列互不相交的集.而且$\bigcup\limits_{\nu=1}^{n}A_\nu=\bigcup\limits_{\nu=1}^{n}B_\nu$, $1\leqslant n\leqslant\infty$.

证明 若$i\neq j$,不妨设$i<j$.显然$B_i\subset A_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

$$\begin{aligned}B_i\cap B_j&\subset A_i\cap\left(A_j-\bigcup_{n=1}^{j-1}A_n\right)\\&=A_i\cap A_j\cap \complement_S A_1\cap \complement_S A_2\cap\cdots\\&\quad\cap \complement_S A_i\cap\cdots\cap \complement_S A_{j-1}=\varnothing.\end{aligned}$$

由$B_i\subset A_i(1\leqslant i\leqslant n)$得$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

设$x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,若$x\in A_1$,则$x\in B_1\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.若$x\overline{\in}A_1$,令$i_n$是最小自然数使$x\in A_{i_n}$,即$x\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{i_n-1}A_i$而$x\in A_{i_n}$.这样$x\in A_{i_n}-\bigcup\limits_{i=1}^{i_n-1}A_i=B_{i_n}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.所以$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.证毕.

7. 设$A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$,$A_{2n}=(0,n)$,$n=1,2,\cdots$,求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集.

解 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$;

设$x\in(0,\infty)$,则存在N,使$x<N$,因此$n>N$时,$0<x<n$,即$x\in A_{2n}$,所以x属于下标比N大的一切偶指标集,从而x属于无限多A_n,得$x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.又显然$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset(0,\infty)$,所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\varnothing$;

若有$x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则存在$N$,使任意$n>N$,有$x\in A_n$.因此若$2n-1>N$时,$x\in A_{2n-1}$,即$0<x<\dfrac{1}{n}$.令$n\to\infty$得$0<x\leqslant0$,此