

国家工科电工电子教学基地精品教材

信号与线性系统

潘双来 邢丽冬 主编

清华大学出版社

2023年12月26日 星期三 12:00:00

国家工科电工电子教学基地精品教材

信号与线性系统

潘双来 邢丽冬 主编

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍确定信号通过线性时不变系统传输的基本理论和分析方法,并对数字信号处理的基础知识做了必要的介绍。全书共分7章,包括信号与系统的基本概念、连续时间系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析、离散系统的 z 域分析、离散信号的傅里叶变换及数字滤波器。

本书可供普通高等学校电气工程、自动控制、工业自动化、计算机、仪器仪表、电子信息工程、通信工程等专业的本科生作为“信号与系统”课程的教材,也可供相关工程技术人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统/潘双来,邢丽冬主编. — 北京:清华大学出版社,2006.2

(国家工科电工电子教学基地精品教材)

ISBN 7-302-11836-1

I. 信… II. ①潘… ②邢… III. ①信号理论—高等学校—教材 ②线性系统—高等学校—教材
IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第106843号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.cn 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:陈国新

印 刷 者:北京市清华园胶印厂

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:20.25 字数:501千字

版 次:2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-11836-1/TN·277

印 数:1~5000

定 价:28.00元

前 言

信号与系统课程是电子信息工程、通信工程等信息类专业和电气工程、工业自动化、自动控制、计算机、仪器仪表等非电子信息类专业的重要技术基础课。它主要研究信号与系统分析的基本理论和方法,在教学计划中起着承前启后的作用。为适应面向新世纪电工电子课程体系改革要求,在建设国家工科电工电子教学基地的过程中,确定了由电路、信号与线性系统、自动控制原理课程组成的新的课程体系,并对各门课程的教学内容重新优化精选,在结合多年教学改革与实践成果,参阅国内外最新优秀教材的基础上,编写成本教材。

在教材体系上,改变传统的电路与系统课程体系,建立了电路、信号与系统、自动控制原理新体系。在教材内容结构上,采用先信号分析后系统分析,建立信号分析是系统分析的基础;先连续信号与系统分析后离散信号与系统分析,突出连续信号与系统分析是系统分析的主导;先时域分析后变换域分析,明确时域分析与变换域分析的相互关系和各自的适用范畴。在时域分析中,突出基本信号的数学定义和性质、信号的变换与运算以及系统的描述与时域特性;在变换域分析中,突出傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换的数学概念、基本性质和工程应用背景,淡化其数学运算和技巧,建立信号频谱与系统函数的概念。

在辅助教学工具上,注重计算机仿真软件的运用,在各章中适当引入计算机辅助教学内容,从过去只注重计算习题转移到注重对基本概念、基本原理和基本方法的理解和应用。本书所提供的程序清单均用MATLAB软件编制并调试通过。MATLAB软件内容丰富、功能强大,学生无需过多地注重计算技巧,只需结合此软件应用所学理论和方法就可掌握所学内容,从而更有效地学习新知识,培养创新素质。

本书适用于电气工程、自动控制、工业自动化、计算机、仪器仪表、电子信息工程、通信工程等专业,其内容是按课内64学时(含实验)而编写的,书中加注“*”的章节内容可供课外选用或自学时参考。由王凤如、王小扬主编的《信号、系统与控制实验教程》与本书配套使用。

全书由潘双来、邢丽冬主编。邢丽冬编写第1、2、5、6、7章,吴旭文编写第3章,王芸编写各章的计算机辅助教学内容,潘双来编写其余章,并负责全书的统稿。本书在编写与出版过程中,得到了清华大学出版社和南京航空航天大学教务处的指导与帮助,在此表示衷心感谢。

本书初稿(讲义)已由南京航空航天大学有关专业学生试用多年,反映效果良好。初稿主要由潘双来、吴旭文、邢丽冬、王芸等编写。

本书由西安电子科技大学郭宝龙教授主审,他对全书做了仔细的审阅,提出许多宝贵意见,在此我们表示最诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请广大同行和读者批评指正。

编者

于南京航空航天大学

2005年12月

目 录

第 1 章 信号与系统的基本概念	1
1.1 信号的概念	1
1.2 基本的连续信号及其时域特性	3
1.3 连续信号的基本运算与时域变换	10
1.4 连续信号的时域分解	14
1.5 系统的概念与特性	16
1.6 信号与系统分析概述	19
1.7 信号变换与运算的 MATLAB 实现	20
习题	28
MATLAB 习题	31
第 2 章 连续时间系统的时域分析	32
2.1 系统的微分算子方程与传输算子	32
2.2 LTI 连续系统的零输入响应	35
2.3 LTI 连续系统的冲激响应与阶跃响应	38
2.4 卷积积分	42
2.5 求系统零状态响应的卷积积分法	47
2.6 卷积积分的计算机辅助教学	49
习题	51
MATLAB 习题	55
第 3 章 连续时间信号与系统的频域分析	57
3.1 信号的正交分解与傅里叶级数	57
3.2 周期信号的频谱	64
3.3 非周期信号的频谱——傅里叶变换	69
3.4 傅里叶变换的基本性质	77
3.5 周期信号的傅里叶变换	92
3.6 连续信号的抽样定理	95
3.7 调制与解调	101
3.8 频分复用与时分复用	104
3.9 连续系统的频域分析	106
3.10 周期信号通过线性系统的计算机辅助求解	117

习题.....	119
MATLAB 习题	125
第 4 章 连续时间信号与系统的复频域分析	127
4.1 拉普拉斯变换	127
4.2 拉普拉斯变换的基本性质	131
4.3 拉普拉斯反变换	140
4.4 线性系统复频域分析法	148
4.5 连续系统的表示与模拟	161
4.6 系统函数与系统特性	176
4.7 连续时间系统复频域分析的 MATLAB 实现	192
习题.....	195
MATLAB 习题	204
第 5 章 离散时间信号与系统的时域分析	205
5.1 离散时间信号——序列	205
5.2 离散时间系统的数学模型	210
5.3 常系数线性差分方程的求解	213
5.4 离散系统单位序列(单位冲激)响应	218
5.5 卷积和	222
5.6 离散系统时域响应的 MATLAB 实现	226
习题.....	231
MATLAB 习题	234
第 6 章 离散系统的 z 域分析	236
6.1 离散信号的 Z 变换	236
6.2 Z 变换的基本性质	239
6.3 Z 逆变换	248
6.4 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	253
6.5 利用 Z 变换求解差分方程	254
6.6 z 域的系统函数 $H(z)$	257
6.7 利用 MATLAB 进行离散系统的 z 域分析	262
习题.....	265
MATLAB 习题	268
第 7 章 离散信号的傅里叶变换及数字滤波器	269
7.1 序列的傅里叶变换	269
7.2 离散傅里叶级数	271
7.3 离散傅里叶变换	274

7.4 离散傅里叶变换的性质	277
7.5 快速傅里叶变换	281
7.6 IDFT 的快速算法	286
7.7 数字滤波器	287
7.8 离散傅里叶变换的 MATLAB 实现	297
习题	300
MATLAB 习题	301
部分习题答案	303
参考文献	314

信号与系统的基本概念

1.1 信号的概念

上至天文、下至地理,大到宇宙空间、小到核粒子研究,人类社会各个领域无时无刻不涉及语言、文字、图画、编码、符号、数据等信息(information)的传输。在电被人类认识之后,因其传输信息快速、便捷,用电作为信息载体的电信号的传输得到快速发展。自 1837 年莫尔斯(F. B. Morse)发明电报以来,历经百余年的发展,传输电信号的通信方式得到了广泛运用与迅速发展,现在电话、电报、无线广播、移动通信、电视已成为人们生活中不可缺少的部分,而为适应生产活动全球化的需要,环绕全球的电信号通信已经实现,并正向超越地球的太阳系通信扩展。

1. 信号的定义与描述

信号(signal)是携带信息的、随时间或空间变化的物理量或物理现象,是信息的载体与表现形式,如声信号、光信号、电信号等。在各种信号中,电信号是一种最便于传输、控制与处理的信号;同时,实际运用中的许多非电信号,如压力、温度、流量、速度、转矩、位移等,都可以通过适当的传感器转换成电信号,因而对电信号的研究具有重要的意义。本书研究的主要是电压、电流、电荷、磁链等电信号。

在数学上,信号可以被描述为一个或多个变量的函数,除了可以用解析式描述外,还可以用图形、测量或统计数据表格来描述。电信号通常是时间 t 的函数,其图形表示称为波形或波形图。要注意信号是实际的物理量,一定是单值的;而函数则可以是抽象的数学定义,可以是多值的。但本书凡提到函数,均指信号,如指数函数即指指数信号。

通常,信号的特性可以从时域和频域两方面来描述。信号的时域特性是指信号出现时间的先后、持续时间的长短、随时间变化的快慢和大小、重复周期的大小等,反映了信号中所包含的信息内容,且可以通过波形表示。信号频域特性的内涵将在第 3 章中阐述。

2. 信号的分类

根据信号的特点,信号可以按以下四种方式分类。

(1) 确定信号与随机信号

能够表示为确定的时间函数的信号称为**确定信号**(determinate signal)。对于确定信号,给定某一时刻,就能确定一个相应的信号值。正弦信号、周期性信号等都是确定信号。

给定 t 的某一个值时,若信号值并不确定,只能通过大量试验得到此信号在某些时刻取某些值的概率分布,称该信号为**随机信号**(random signal)。空气中的噪音就是一种随机信号。

严格说来,实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性,因为对于接收者来说,信号如果是完全确定的,就不可能由它得到任何新的信息,因而也就失去了传输信号的本意。尽管如此,对确定信号的分析仍然是基本和重要的,这不仅因为许多实际信号与确定信号有相近的特性,可以被近似或理想化为确定信号,使问题的分析大大简化,而且对确定信号的分析也是分析随机信号的基础。本书只研究确定信号。

(2) 连续时间信号与离散时间信号

一个信号,如果在某一时间区间内的所有时间值(除了有限个断点之外)都有定义,就称之为**连续时间信号**,简称**连续信号**(continuous signal)。如图 1-1(a),(b)所示的两个信号均为定义在 $-\infty < t < \infty$ 内的连续信号,其中 $f_2(t)$ 在定义域内具有若干个间断点。

仅在离散时刻上有定义的信号称为**离散时间信号**,简称**离散信号**(discrete signal),如图 1-2 所示。离散时刻的间隔可以是相等的,也可以是不相等的,间隔相等的离散信号也称为**序列**(sequence)。连续时间信号有时也称为模拟信号,而幅度也取离散值的离散时间信号则有时也称为数字信号。本书将从第 5 章开始讨论离散信号与系统。

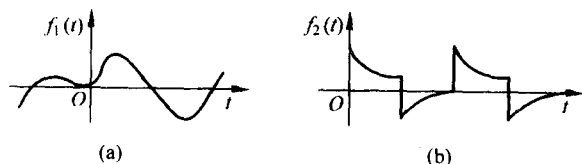


图 1-1 连续时间信号

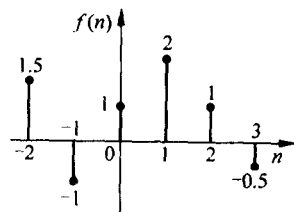


图 1-2 离散时间信号

(3) 周期信号与非周期信号

一个信号 $f(t)$, 若对 $-\infty < t < \infty$, 存在一个常数 T , 使得

$$f(t - nT) = f(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

则称 $f(t)$ 是以 T 为周期的**周期信号**(periodic signal)。不满足上述条件的信号称为**非周期信号**(non-periodic signal)。两个周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号之和仍为周期信号的条件是 T_1/T_2 为两个(不可约的)整数之比, 且其周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数。

(4) 功率信号与能量信号

连续信号 $f(t)$ 的能量定义为

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-2)$$

连续信号 $f(t)$ 的平均功率定义为

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

若信号的平均功率为有限值(此时信号能量 $E = \infty$)，则称之为**功率信号**(power signal)；若信号能量为有限值(此时信号平均功率 $P = 0$)，则称之为**能量信号**(energy signal)。

根据定义信号的时间区间，信号可以按以下三种方式分类。

(1) 时限信号与非时限信号

若在有限时间区间($t_1 < t < t_2$, t_1 与 t_2 为实常数)内，信号 $f(t)$ 存在，而在此时间区间之外 $f(t) = 0$ ，则此信号称为**时限信号**(time signal)；否则称为**非时限信号**(timeless signal)。

(2) 有始信号与有终信号

设 t_1 为实常数，若 $t < t_1$ 时， $f(t) = 0$ ， $t > t_1$ 时， $f(t) \neq 0$ ，则 $f(t)$ 称为**有始信号**(causal signal)，其起始时刻为 t_1 。设 t_2 为实常数，若 $t > t_2$ 时， $f(t) = 0$ ， $t < t_2$ 时， $f(t) \neq 0$ ，则 $f(t)$ 称为**有终信号**(terminal signal)，其终止时刻为 t_2 。

(3) 因果信号与非因果信号

起始时刻 $t_1 = 0$ 的有始信号称为**因果信号**(causal signal)，可用 $f(t)\epsilon(t)$ 表示，其中 $\epsilon(t)$ 为单位阶跃信号；终止时刻 $t_2 = 0$ 的有终信号称为**非因果信号**(non-causal signal)，可用 $f(t)\epsilon(-t)$ 表示。

按信号的特点，信号还可以分为正弦信号与非正弦信号、一维信号与二维或多维信号(电视信号是二维信号的例子)等。

1.2 基本的连续信号及其时域特性

所谓**基本信号**(basic signal)，是指波形及其时间函数表达式较为简洁，且在工程实际与理论研究中常用的信号，而复杂信号可以由一系列基本信号组合而成。本节仅介绍基本的连续信号，离散信号将在第5章中介绍。

1. 直流信号

直流信号的定义为

$$f(t) = A, \quad -\infty < t < \infty \quad (1-4)$$

式中， A 为实常数，其波形如图 1-3 所示。直流信号也称为**常量信号**(constant signal)，它是非时限信号。当 $A = 1$ 时，称为单位直流信号。

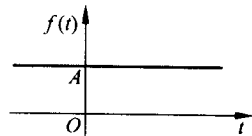


图 1-3 直流信号

2. 正弦信号

正弦信号的定义为

$$f(t) = A \cos(\Omega t + \Psi), \quad -\infty < t < \infty \quad (1-5)$$

式中， A ， Ω ， Ψ 分别称为正弦信号的**振幅**、**角频率**和**初相角**，三者均为实常数。其波形如图 1-4 所示。本书中正弦信号用 cosine 的形式表示。

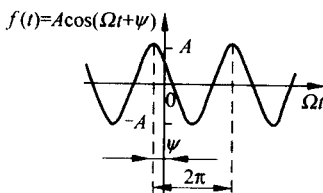


图 1-4 正弦信号

正弦信号有如下性质：

(1) 是无时限的周期信号,其周期 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$,当 $T \rightarrow \infty$ 时就成为非周期的直流信号。

(2) 其导函数仍然是同频率的正弦信号,只是振幅变为 ΩA ,相位增加 $\frac{\pi}{2}$; 式(1-5)的导函数为

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}[A\cos(\Omega t + \Psi)] = \Omega A \cos\left(\Omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

(3) 满足如下形式的二阶微分方程

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \Omega^2 f(t) = 0$$

3. 单位阶跃信号

单位阶跃信号(unit step signal)定义为

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

其波形如图 1-5 所示。可见, $\epsilon(t)$ 在 $t=0$ 时发生了阶跃,从 $\epsilon(0_-)=0$ 跃变到 $\epsilon(0_+)=1$,跃变了一个单位。同理,信号 $\epsilon(t-t_0)$ 发生阶跃的时刻为 $t=t_0$ 。

非因果信号 $f(t)$ 乘以 $\epsilon(t)$ 后就变成因果信号 $f(t)\epsilon(t)$,有

$$f(t)\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t), & t > 0 \end{cases}$$

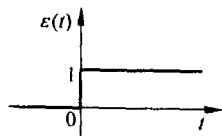


图 1-5 单位阶跃信号

利用阶跃信号可以将分段定义的信号表示为定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的闭形表达式。例如

$$f(t) = \begin{cases} -2, & t < 0 \\ 5t, & 0 < t < 2 \\ 10, & t > 2 \end{cases}$$

可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= -2[1 - \epsilon(t)] + 5t[\epsilon(t) - \epsilon(t-2)] + 10\epsilon(t-2) \\ &= -2 + (5t+2)\epsilon(t) - 5(t-2)\epsilon(t-2) \end{aligned}$$

其中, $-2, t < 0$ 写成封闭形式为 $[-2 + 2\epsilon(t)]$ 。

4. 单位门信号

门宽为 τ , 门高为 1 的单位门信号(unit gate signal)常用 $G_\tau(t)$ 表示,它定义为

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t < -\frac{\tau}{2}, t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1-7)$$

其波形如图 1-6(a)所示,单位门信号可用图 1-6(b), (c)所示的两个阶跃信号之差表示,即

$$G_\tau(t) = \epsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1-8)$$

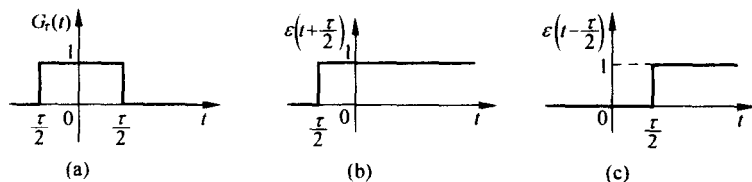


图 1-6 单位门及其分解信号的波形

5. 单位冲激信号

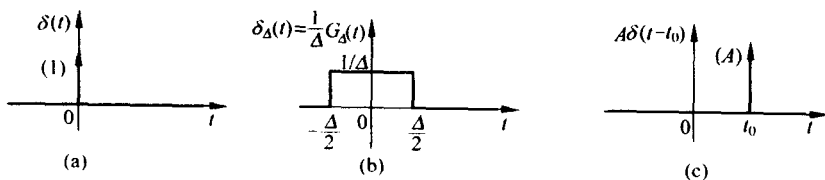
单位冲激信号(unit impulse signal) $\delta(t)$ 的定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

其面积为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1 \quad (1-10)$$

其波形如图 1-7(a)所示。可见 $\delta(t)$ 除原点以外,处处为零,且具有单位面积,此面积称为冲激强度(impulse intensity)。单位冲激信号 $\delta(t)$ 可理解为图 1-7(b)所示的宽为 Δ 、高为 $1/\Delta$ 、面积为 1 的门信号 $\frac{1}{\Delta}G_{\Delta}(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限。

图 1-7 $\delta(t)$ 、 $\delta_{\Delta}(t)$ 和 $A\delta(t-t_0)$ 的波形

显然,信号 $A\delta(t-t_0)$ 发生冲激的时刻为 $t=t_0$,与式(1-10)相对应的有效积分的上、下限分别为 t_{0+} 和 t_{0-} ,其冲激强度为 A ,它的波形如图 1-7(c)所示。

冲激信号 $\delta(t)$ 有如下性质:

(1) 与有界函数 $f(t)$ 相乘,设 $f(t)$ 在 $t=0$ 及 $t=t_0$ 连续,则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1-11)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-12)$$

(2) 由式(1-11)、式(1-12)以及冲激强度的概念,可得 $\delta(t)$ 的抽样性(筛分性)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \quad (1-13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (1-14)$$

其中, $f(t)$ 称为被抽样的函数, $f(0)$ 或 $f(t_0)$ 称为抽样值。

例 1-1 试简化下列各信号的表达式:

(1) $f_1(t) = (1 - e^{-t})\delta(t)$

(2) $f_2(t) = (1 - e^{-t})\delta(t-1)$

解 根据式(1-11)和式(1-12)有

$$f_1(t) = (1 - e^{-t})\delta(t) = (1 - e^0)\delta(t) = 0$$

$$f_2(t) = (1 - e^{-t})\delta(t-1) = (1 - e^{-1})\delta(t-1) = 0.632\delta(t-1)$$

解毕。

(3) $\delta(t)$ 为偶函数, 即有

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-15)$$

证明 将上式两边乘以 $f(t)$ 并进行积分, 左边作变量代换 $t' = -t$, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(-t')\delta(t')(-dt') = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t')dt' = f(0)$$

而右边

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

即以上两积分相等, 而 $f(t)$ 又是任意的, 因此式(1-15)成立。

证毕。

(4) 尺度变换。设实常数 $a > 0$, 则

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \quad (1-16)$$

证明 作变量代换 $t' = at$, 并设 $f(t)$ 为在 $t=0$ 连续的任意函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt' = \frac{1}{a}f(0) \quad (1-17)$$

比较上式与式(1-13), 并注意到 $f(t)$ 的任意性, 可知两被积式有如下关系:

$$f(t)\delta(at) = \frac{1}{a}f(t)\delta(t)$$

因而式(1-16)成立。

证毕。

式(1-16)可推广为

$$\delta(at - t_0) = \delta\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] = \frac{1}{a}\delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at - t_0)dt = \frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$$

注意到当实常数 $a < 0$ 时, $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ 。

(5) $\delta(t)$ 与 $\epsilon(t)$ 的关系是互为微分与积分的关系, 即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \\ \delta(t) &= \frac{d\epsilon(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

上式可由这两个奇异函数的定义以及微分、积分的运算得到。

式(1-18)可推广为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(t - t_0) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau \\ \delta(t - t_0) &= \frac{d\epsilon(t - t_0)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

例 1-2 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \delta(-2t) dt$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \delta(1-2t) dt$$

解

$$(1) \text{ 原式} = \int_{-\infty}^{\infty} (0+1)^2 \cdot \frac{1}{2} \delta(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ 原式} = \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \cdot \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{9}{8}$$

6. 单位冲激偶信号

单位冲激偶信号(unit doublet signal) $\delta'(t)$ 的定义为单位冲激信号 $\delta(t)$ 的一阶导数, 即

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt}[\delta(t)] \quad (1-20)$$

由于单位冲激信号 $\delta(t)$ 为图 1-7(b) 所示门信号 $\delta_{\Delta}(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 的极限, 对 $\delta_{\Delta}(t)$ 求导的结果是在 $t = \pm\Delta/2$ 时刻出现冲激强度为 $\pm 1/\Delta$ 的冲激信号, 如图 1-8(a) 所示。于是单位冲激偶信号 $\delta'(t)$ 是在 $t = 0_{-}, 0_{+}$ 出现冲激强度为 $\pm\infty$ 的冲激信号, 如图 1-8(b) 所示。

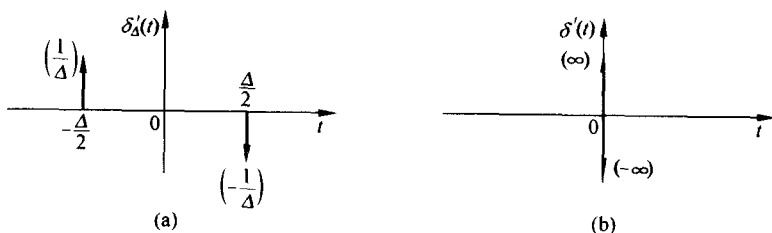


图 1-8 $\delta'_{\Delta}(t)$ 和 $\delta'(t)$ 的波形

冲激偶信号 $\delta'(t)$ 有如下性质:

(1) $\delta'(t)$ 与函数 $f(t)$ 相乘, 设 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续, 则

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (1-21)$$

证明 由于

$$[f(t)\delta(t)]' = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

有

$$[f(0)\delta(t)]' = f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

得

$$f(0)\delta'(t) = f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

移项即得式(1-21)。

证毕。

式(1-21)可推广为

$$f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-22)$$

(2) $\delta'(t)$ 为奇函数, 其波形关于原点对称, 即有

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \quad (1-23)$$

$$\delta'(t - t_0) = -\delta'(t_0 - t) \quad (1-24)$$

(3) 按 $\delta'(t)$ 的定义知

$$\int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau = \delta(t) \quad (1-25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-26)$$

式(1-25)及式(1-26)可推广为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0) \quad (1-27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0) \quad (1-28)$$

(4) 尺度变换。设实常数 $a > 0$, 则

$$\delta'(at) = \frac{1}{a^2} \delta'(t) \quad (1-29)$$

证明 作变量代换 $t' = at$, 并设 $f(t)$ 为在 $t=0$ 连续的任意函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(at) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right) \delta'(t') dt' = -\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[f\left(\frac{t'}{a}\right) \right] \Big|_{t'=0} = -\frac{1}{a^2} f'(0)$$

比较上式与式(1-27), 并注意到 $f(t)$ 的任意性, 可知两被积式有如下关系:

$$f(t) \delta'(at) = \frac{1}{a^2} f(t) \delta'(t)$$

因而式(1-29)成立。

证毕。

例 1-3 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 1) dt$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} [\delta(t) + \delta'(t)] dt$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \delta'(1-2t) dt$$

解 (1) $\delta(t^2 - 1)$ 实际上是分别在 $t = -1$ 和 $t = 1$ 处各有一个冲激, 故此积分为 2;

$$(2) \text{ 原式} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} \delta(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} \delta'(t) dt = e^{-2t} \Big|_{t=0} [e^{-2t}]' \Big|_{t=0} = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= - \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \delta'(2t-1) dt = - \frac{1}{2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)^2 \delta'\left(t - \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} [(t+1)^2] \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

7. 单位斜坡信号

单位斜坡信号 (unit ramp signal) $r(t)$ 的定义为

$$r(t) = t\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-30)$$

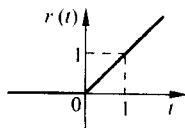


图 1-9 单位斜坡信号

其波形如图 1-9 所示。

单位斜坡函数 $r(t)$ 与 $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$ 的关系为

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\xi) d\xi d\tau \\ r'(t) &= \varepsilon(t) \\ r''(t) &= \delta(t) \end{aligned}$$

单位斜坡函数 $r(t)$ 的一次积分是单边抛物线, 即

$$\int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau = \frac{1}{2} t^2 \varepsilon(t)$$

8. 单边衰减指数信号

单边衰减指数信号(single-sided damping exponential signal)的定义为

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases} \quad (1-31)$$

其波形如图 1-10 所示。其中 α 为正的实常数, 称为衰减系数。每经过 $1/\alpha$ 的时间, 信号会衰减为原来的 $e^{-1} = 0.368$ 倍。注意到此信号是单边的, 且信号值从 $t = 0_-$ 时的 0 跃变为 $t = 0_+$ 时的 A 。

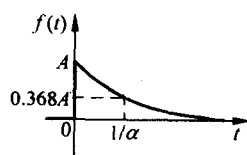


图 1-10 单边衰减指数信号

9. 复指数信号

复指数信号(complex exponential signal)定义为

$$f(t) = Ae^{st}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1-32)$$

式中, $s = \sigma + j\omega$ 称为复频率; A, σ, ω 均为实常数; σ 的单位为 $1/s$; ω 的单位为 rad/s 。由于

$$f(t) = Ae^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t} = Ae^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

可见该信号的模 $|A|e^{\sigma t}$ 为实指数信号; 辐角为 ωt ; 实部与虚部均为指数规律 $Ae^{\sigma t}$ 变化且角频率为 ω 的正弦信号。

复指数信号的几种特殊情况如下:

- (1) 当 $s = 0$ 时, $f(t) = A$, 为直流信号;
- (2) 当 $s = \sigma$ 时, $f(t) = Ae^{\sigma t}$, 为实指数信号;
- (3) 当 $s = j\omega$ 时, $f(t) = Ae^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \sin \omega t)$, 其实部与虚部均为角频率为 ω 的等幅正弦信号, 因而 $Ae^{j\omega t}$ 也是一个以 $T = 2\pi/\omega$ 为周期的周期性信号。

10. 抽样信号

抽样信号(sampling signal)定义为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad -\infty < t < \infty$$

(1-33)

其波形如图 1-11 所示。抽样信号 $\text{Sa}(t)$ 有如下性质:

- (1) $\text{Sa}(t)$ 为实变量 t 的偶函数, 即

$$\text{Sa}(-t) = \text{Sa}(t)$$

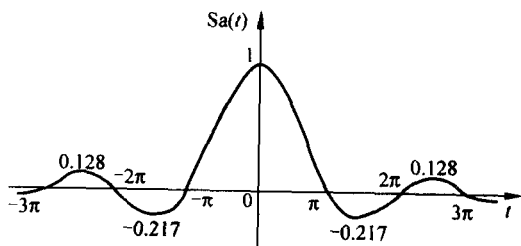


图 1-11 抽样信号