21世纪高等院校教材

应用概率统计教程

曹炳元　阎国军　编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书根据综合性大学应用数学专业的特点, 介绍了概率论与数理统计的基本理论及应用实例. 全书共 10 章, 内容包括: 概率论的基本概念; 一维和多维离散型到连续型随机变量及其分布; 随机变量的数字特征; 大数定律和中心极限定理; 数理统计的概述; 参数估计; 假设检验; 方差分析和回归分析. 每章附有一定量难易参半的习题, 并用附注形式介绍每章内容的史料及发展情况.

本书可作为高等院校数学各专业的教材和理工、管理类专业本科生、研究生的教学用书, 亦可供广大科技人员、高等院校教师参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

应用概率统计教程/曹炳元, 阎国军编著. — 北京: 科学出版社, 2005
21 世纪高等院校教材
ISBN 7-03-013327-7

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①曹…②阎… Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 043104 号

责任编辑：鄢德平　李鹏奇 / 责任校对：张　琪
责任印制：安春生 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2005 年 8 月第一次印刷　印张：19 1/2
印数：1—3 000　字数：370 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

序　言

马克思曾经说过，一种科学只有当它成功地利用了数学的时候，才能达到完善的地步. 自从 17 世纪牛顿和莱布尼茨发明了微积分之后，应用数学的新方法成功地解决了一系列上至天文地理，下至日常生活中的重要问题. 数学的影子无处不在，人们不禁惊叹：大自然是用数学说话. 概率论严格地演绎研究大量随机现象的数量关系，数理统计学则侧重于归纳方法. 它们的共同点都是研究随机现象的统计规律性. 近年来，由于科学技术的日新月异，研究方法的不断更新，概率统计已成为各门学科中不可或缺的理论基础和研究工具.

因此，概率论与数理统计教材的建设，已经提到了教育部门的议事日程上来. 长期以来，数学各专业一直把它作为核心骨干课，其他各学科专业都是将其作为一门重要的基础课程来建设. 10 年来，汕头大学在概率统计教材、教学内容和教学方法等方面进行了大量的改革，取得了一系列的成果. 曹炳元、阎国军编著的《应用概率统计教程》正式出版，就是这一改革的新成果.

《应用概率统计教程》适用于应用数学等专业，该书以素质教育，应用能力训练作为编写的宗旨，采用目前欧美流行的平铺式叙述的方式，融定理、定义与应用实例和方法于一体，使学生在自觉学习的过程中自然而然地接受概率统计的必要理论，掌握应用的方法. 在内容方面，贯彻执行了“少而精”和“循序渐进”的原则，删繁就简，精选内容，既囊括了教育部颁布的概率统计教学大纲的全部内容，又适合每周 4 课时，总共 75 学时左右的教学要求，使教材体系的完整性和适用性并重，这是本教程的最大特点. 同时，通俗易懂，条理清楚，且辅以一些概率统计方面的史料或进展介绍，使该书趣味横生，这种严密性与趣味性兼顾的方式，亦不能不说是该教材的又一特色.

目前已进入 21 世纪，这是“信息大革命”、“生命科学大发展”的年代. 概率统计已使数学在生物学领域等于零 (恩格斯语) 的事实成为历史. 如果我们持之以恒地努力学习与研究，概率统计必将在新时代开出更加绚丽多彩的花朵. 愿此书能给各位学子以启迪，并成为他们的良师益友.

王梓坤

2005 年 5 月 18 日

于北京师范大学

前　言

《应用概率统计教程》一书，是在我国概率统计专家、中国科学院院士、汕头大学顾问教授、北京师范大学王梓坤教授的主持下进行的一次改革性编写. 它以素质教育、应用能力的训练作为编书的主题，并贯彻于编写之中. 同时吸取了国内外同类教材的优点，具有较高的学术价值.

概率统计，本是一门应用性很强的学科，但目前的许多教材太偏重于定理的推导，使学生面对这么繁杂的理论与方法构架而感到茫然，甚至望而生畏. 学习后不知学了些什么，学完后印象不深，更谈不上如何应用了. 本教材试图打破这一点，采用目前欧美流行的平铺式叙述的方式，融定理、定义与应用实例和方法于一体，使学生自然而然地接受概率统计的必要理论和应用方法. 由于这种叙述方式具有由浅入深、深入浅出的风格，使得该教材简明扼要、通俗易懂. 再加上一些点缀的概率统计的史料，使教材趣味横生. 此类编写方式方法，在国内属首次尝试，这也是王梓坤院士在 1998 年申报广东省概率统计重点课程时的愿望，即在国内率先写出一本融知识性、应用性和趣味性于一体的全新教材，为推动全国的素质教育和教材改革而贡献微薄之力.

本书介绍了高等院校应用数学类专业概率论与数理统计课程的基本内容. 按照国家教育部关于高校编写教材，内容要“够用”和“适度”的原则，删繁就简. 具体内容要求按三级区分（即理论知识用“知道”、“了解”、“理解”区分；算法、技巧用“会”、“掌握”、“熟练掌握”区分）. 全书分为两大部分共十章. 第一部分为概率论，共分五章. 第 1 章引入了概率论的基本概念. 如概率的定义、运算规则和 Bayes 定理等性质. 第 2 章介绍了一维随机变量及其分布. 从离散型到连续型，从随机变量到概率分布分层介绍，侧重介绍了应用最广泛的正态分布. 第 3 章继续介绍多维离散型到多维连续型随机变量及其分布. 第 4 章讨论了随机变量的数字特征. 第 5 章初步探讨了在数理统计中有广泛应用的大数定律与极限定理. 第二部分为数理统计，共分五章. 第 6 章是数理统计的概述，包括将数理统计中的一些理论性问题，与概率论有机结合起来. 第 7 章给出了参数估计的基本方法. 第 8 章叙述了假设检验. 第 9 章阐述如何对误差作方差分析. 第 10 章提出了回归分析常用的方法. 每章附有一定量难易参半的习题，并用附注形式介绍每章内容的史料及发展情况. 书末附有参考文献和一些常用表格. 本书可作为高等院校应用数学系各专业的教材和管理类院校各专业本科生、研究生的教科书，亦可供广大科技人员参考. 如果将有

关理论略讲，本书亦可作为成人高校的教材或教学参考书.

最后要特别指出，广东省重点课程《概率论与数理统计》项目（1998年1月~2002 年 1 月），汕头大学李嘉诚教育基金会教材出版项目和汕头大学教务处的全力资助，是本书得以出版的基础. 教育部高等理科教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划第一批项目《应用数学类专业教学内容和课程体系改革研究》(1997 年 6 月 ~2001 年 6 月) 的思路，给本书的编写以深深的启迪，我们对此表示最诚挚的感谢. 同时，汕头大学数学系及乌兰哈斯教授对本书的出版给予了大力支持. 硕士生周雪刚、周继振、朱章遐、谭云峰、谷秋鹏、仇海全和侯勇超等打印、校对了书稿，博士生杨吉会为本书做了大量的工作，对此一并表示谢忱. 最后还要感谢广州大学及其数学与信息科学学院和教务处、郑州大学的大力支持.

曹炳元教授撰写了本书的第 1 章、第 5 至 10 章，博士后阎国军撰写了本书的第 2 至 4 章. 最后由王梓坤院士和曹炳元教授总纂了全书.

由于我们水平所限，才疏学浅，加之成书时间仓促，书中错误在所难免，恳请各位专家和同仁不吝赐教，我们深表谢意.

编著者

2005 年 4 月于汕头大学

目　　录

第 1 章　概率论的基本概念 1

1.1　概率论研究的对象、随机性与样本空间 1

1.2　概率事件的关系及其运算 3

1.3　频率与概率 6

1.4　概率的公理化定义 13

1.5　概率的计算 19

1.6　事件的独立性 25

习题 33

第 2 章　一维随机变量及其分布 38

2.1　随机变量与分布函数 38

2.2　离散型随机变量 42

2.3　泊松分布、几何分布与超几何分布 46

2.4　连续型随机变量 48

2.5　正态分布与 Γ 分布 51

2.6　随机变量的函数 55

习题 59

第 3 章　多维随机变量及其分布 64

3.1　二维随机变量 64

3.2　离散型和连续型二维随机变量 66

3.3　边缘分布与独立性 71

3.4　条件分布 76

习题 79

第 4 章　随机变量的数字特征 85

4.1　一维随机变量的数字特征 85

4.2　多维随机变量的数字特征 89

4.3　n 维正态分布 93

习题 99

第 5 章　大数定律与极限定理 104
5.1　随机变量序列的收敛性、切比雪夫不等式 104
5.2　大数定律 107
5.3　中心极限定理 109
习题 115

第 6 章　数理统计概述 118
6.1　母体、样本、经验分布函数 118
6.2　统计量及其分布 121
6.3　次序统计量及其分布 128
习题 132

第 7 章　参数估计 138
7.1　点估计 138
7.2　参数的区间估计 166
习题 176

第 8 章　假设检验 182
8.1　假设检验的基本概念 182
8.2　单正态母体参数的检验 186
8.3　两正态母体参数的检验 193
8.4　非参数假设检验 201
8.5　独立性检验法 220
习题 224

第 9 章　方差分析 230
9.1　单因子方差分析 230
9.2　双因子方差分析 239
9.3　应用方差分析注意的问题 248
习题 249

第 10 章　回归分析 252
10.1　回归及回归直线 252

10.2　一元线性回归的数学模型 254
10.3　推广 I —— 非线性回归 268
10.4　推广 II —— 多元线性回归 271
习题 283

参考文献 286

附表 287
附表 1　二项分布累积概率 $P(\xi \leqslant x)=\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i p^i (1-p)^{n-1}$ 表 287
附表 2　泊松分布概率值表 290
附表 3　正态分布函数 $N(0,1)$ 的数值表 291
附表 4　χ^2 检验的临界值表 292
附表 5　F 检验的临界值表 293
附表 6　t 分布单侧临界值表 299
附表 7　科尔莫戈罗夫检验的临界值 $(D_{n\alpha})$ 表 300
附表 8　D_n 的极限分布表 301
附表 9　相关系数临界值 r_0 表 302

第 1 章　概率论的基本概念

本章介绍了概率论的基本概念, 从概率的几个定义和贝特朗奇论入手, 引入了概率的公理化定义, 给出了概率的计算公式, 最后讨论了事件的独立性.

1.1　概率论研究的对象、随机性与样本空间

1.1.1　概率论研究的对象

世界上存在着各种各样的现象, 一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象, 称为确定性现象.

例 1.1.1　在标准大气压下, 水在 100°C 时沸腾; 同性电荷相斥, 异性电荷相吸等, 都是确定性现象.

然而, 我们的世界充满了不确定性. 只有这些不确定性存在, 这个世界才显得更有趣.

例 1.1.2　从一批产品中取一件进行检查, 该产品是正品还是次品, 在检查之前不能确定.

例 1.1.3　每天进出于某火车站的人数.

例 1.1.4　一部电话机在某一小时内通话次数, 可能是 0 次, 1 次, 2 次, $\cdots$, 但事先无法知道通话次数.

上述试验都是不确定性现象. 经验表明, 这些不确定的现象在大量的试验中, 它们的发生又具有一定的规律性. 例如掷硬币试验, 维尼作 3000 次投掷, 出现正面与反面的可能均接近 $\dfrac{1}{2}$. 又如抽取大量的产品进行检查, 其正品数所占的比例, 就趋向于全部产品中正品的比例 (又称正品率), 检查的数量越大, 就越接近正品率. 这种经过大量重复试验, 所具有的规律性称为统计规律性.

在一次试验中, 其试验的结果是不确定的, 但在大量重复试验中, 具有一定的规律的现象, 称为随机现象.

概率论就是研究大量随机现象的统计规律性的一个数学分支.

1.1.2　随机试验、事件

如果一个试验满足如下条件:

i) 试验可以在相同的情形下重复进行;

ii) 试验的所有可能结果是明确可知道的, 并且不止一个;

iii) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

则称这样的试验是一个随机试验, 简称为试验, 用 E 表示:

E_1: 投掷一枚硬币一次, 观察哪一面向上;

E_2: 投掷一枚硬币两次, 观察正、反面出现的情况;

E_3: 投掷骰子一次, 观察出现的点数;

E_4: 观察一小时内落在地球上某一区域内的宇宙射线数;

E_5: 任找一个人, 量他的身高;

E_6: 任找一个人, 量他的身高以决定他买哪一类火车票.

它们均满足随机试验的三个条件, 因而是随机试验. E_5, E_6 虽然条件相同, 但观察的特征不同, 所以是不同的随机试验.

上述随机试验中, 不能再分解的随机试验的结果, 称为基本事件或样本点, 用 ω 表示.

例如, E_3: "出 1 点", "出 2 点", $\cdots$, "出 6 点" 都是基本事件. 但 "出偶数点" 虽然也是随机试验的结果, 却不是基本事件, 因为它能分解为 "出 2 点"、"出 4 点、"出 6 点" 三个更基本的事件. 我们称此类事件为复杂事件.

1.1.3 样本空间

我们把全体样本点构成的集合, 称为样本空间, 用 Ω 表示, 记为 $\Omega=\{\omega\}$.

例 1.1.5 上述 $E_1\sim E_6$, 用样本空间表示如下:

E_1: 用 H 表示正面向上, T 表示反面向上, 则 $\Omega_1=\{H,T\}$;

E_2: $\Omega_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$, 注意: 对 E 投掷两次才算作一次试验;

E_3: $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

E_4: $\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

E_5: $\Omega_5=\{h|h>0\}$;

E_6: $\Omega_6=\{$全票, 半票, 免票$\}$.

由这 6 个样本空间可以看出, 样本点可以是数也可以不是数 (如 Ω_1,Ω_2). 样本空间内的样本点的个数可以是有限个、可数个 (如 Ω_4), 也可以是不可数的 (如 Ω_5). 样本空间是由随机试验决定的.

在随机试验中, 每次试验都必然发生的事件称为必然事件, 用 Ω 表示. 例如, 对 E_3, 事件: "掷出的点数小于 7" 就是必然事件.

在随机试验中, 每次试验都永远不可能发生的事件称为不可能事件, 用 $\varnothing$ 表示. 例如, 对 E_3, 事件: "掷出的点数大于 6" 就是一个不可能事件.

1.2 概率事件的关系及其运算

一个样本空间 Ω 中, 可以有很多的随机事件. 概率论的任务之一是研究随机事件的规律, 通过较简单事件的规律的研究, 去掌握更复杂事件的规律. 为此, 需研究事件之间的关系和事件之间的运算.

1.2.1 事件的关系与运算

我们已掌握了集合之间的关系和运算, 它们与概率论中事件之间的关系和运算一致, 现将两者列表如表 1.2.1, 以便对照.

表 1.2.1

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	空间 (全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件 (样本点)	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 的发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 和事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A\cup B$	事件 A 和事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 和事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\phi$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 无公共元素

(1) 事件的包含: 若事件 A 发生, 使得事件 B 必然发生, 则称事件 B 包含事件 A, 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

两事件相等: 若事件 B 包含事件 A, 且事件 A 也包含事件 B, 即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称两事件 A, B 相等, 记作 $A=B$.

(2) 事件的和: 事件 A, B 至少有一个发生了的事件, 称为事件 A 与事件 B 之

和, 记为 $C = A \cup B$.

推广: $C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 为 n 个事件之和.

$C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为无穷多个事件之和.

(3) 事件的积: 事件 A, B 同时发生的事件, 称为事件 A 与 B 之积, 记作 $A \cap B$ 或 AB.

推广: $\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均发生$\}= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件之积.

$\{A_1, A_2, \cdots,$ 均发生$\}=A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为无穷多个事件之积.

(4) 事件的差: 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件, 称为事件 A 与 B 之差, 记作 $A - B$.

(5) 互不相容 (互斥) 事件: 若事件 A, B 不能同时发生, 则称 A 与 B 为互不相容事件或互斥事件, 即 $AB = \varnothing$.

推广: n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 中, 任意两个互不相容, 即事件

$$A_iA_j = \phi \quad (i \neq j, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

称 n 个事件 A_1,A_2,$\cdots$,A_n 为互不相容事件.

(6) 对立 (互逆) 事件: 若事件 A, $\overline{A}$ 必有一个发生, 也只有一个发生 (不能同时发生), 即

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \ A\overline{A} = \phi,$$

则称 A, $\overline{A}$ 为对立事件, 又称为互逆事件.

由于 A 与 $\overline{\overline{A}}$ 都是 $\overline{A}$ 的对立事件, 故显然有 $A = \overline{\overline{A}}$.

比较: 对立事件 $\neq$ 互不相容事件.

由此可知, 在一次试验中, 只有两个互不相容的事件, 才同时也是对立事件.

例 1.2.1 A={今天天气好}, $\overline{A}$={今天天气坏}.

(7) 若有 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, 则 "A_1, A_2, $\cdots$, A_n 中至少发生其中一个" 这一事件, 称为 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的并, 记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \ \text{或} \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

若 "A_1, A_2, $\cdots$, A_n" 同时发生, 则此事件称为 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的交, 记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \ \text{或} \ \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

对于初学概率者来说, 关键是会用概率论的语言来解释事件间的关系与运算, 并会用这些运算关系来表示一些事件.

例 1.2.2 设 A, B, C 为任意三个事件, 则:

(1) "A 发生而 B 与 C 均不发生" 事件可表示为: $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$;

(2) 事件“A 与 B 都发生而 C 不发生”可表示为: $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;

(3) 事件“A,B,C 只发生其一”可表为: $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(4) 事件“A,B,C 中恰有两个发生”可表示为: $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$;

(5) 事件“A,B,C 中至少有一个发生”可表示为: $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{AB}C\cup A\overline{BC}\cup ABC$.

(6) 事件“A,B,C 中没有一个发生”可表示为: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

1.2.2 事件的运算性质

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$.

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律: $A(B\cup C)=AB\cup AC,\quad A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 德摩根对偶定理:

① $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$, 即和的逆等于逆之积.

② $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$, 即积的逆等于逆之和.

证 仅证①, ②留给读者证明.

若 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}$ 发生, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 不发生, 即 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 均不发生, 从而 $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 都发生, 亦即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$ 发生, 从而推得

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

反之, 若 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$ 发生, 则 $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\cdots$, $\overline{A_n}$ 都发生, 从而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都不发生, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 不发生. 因而 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}$ 发生, 即

$$\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\subset\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}.$$

所以①得证.

以后, 我们把“事件”作为样本空间 Ω 的子集 (不必是全体子集) 归在一起, 组成一个集类, 记作 $\mathcal{F}$, 称为事件域, 它满足:

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$;

(2) 若 $A\in\mathcal{F}$, 则 $\bar{A}\in\mathcal{F}$;

(3) 若 $A_i\in\mathcal{F}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$.

1.3 频率与概率

从一副扑克牌中, 抽两张牌为红心 A 和梅花 A 的试验是一随机试验, 其样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, 其中

$$\omega_1=\{\text{取得红心 } A\},\quad \omega_2=\{\text{取得梅花 } A\}$$

是基本事件. 在一次试验中, 虽然不能肯定是 ω_1 还是 ω_2 发生, 但可以了解在这次试验中发生 ω_1(或 ω_2) 的可能性有多大?

对于随机事件 A, 用数字 $P(A)$ 表示其发生的可能性大小的数量表征. 怎么样严格定义并从数量上来规定 $P(A)$ 呢? 历史上已有 4 种定义和计算方法, 即为古典定义、几何定义、统计定义和公理化定义. 前三个定义都有缺陷, 是历史进程中产生的, 并都是已被广泛接受的公理化定义的特例. 由于一个数学概念只能有一个定义, 所以, 我们只把前三个定义看作确定概率的三种方法, 而不看作概率的正式定义. 尽管如此, 它们在建立概率的公理化定义的进程中作出了贡献, 且是在一定范围内确定或计算概率的强有力的工具. 因此, 以下将用一定篇幅介绍它们. 首先介绍统计定义.

1.3.1 频率

对某一随机事件 A 来说, 当试验次数较少时, 随着试验轮次的不同, 其频率往往有较明显的差异. 先看下面的试验:

掷硬币 10 次, "正面" 出现 6 次, 它与总次数之比为 0.6; 再一轮的 10 次, 其 "正面" 出现的频率可能是 0.3. 但是通过大量的试验观察, 人们发现, 当试验次数愈来愈多时, 它却呈现出明显的规律性.

例 1.3.1 掷均匀硬币问题: 历史上许多著名数理统计学家, 曾做抛一枚均匀硬币的实验, 表 1.3.1 是德摩根、蒲丰、皮尔逊和维尼等人实验的记录.

表 1.3.1 一枚均匀硬币抛掷试验的结果

实验者	抛掷次数 n	出现正面的次数	百分比
德摩根	2048	1017	0.4966
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

由上述记录可以看出, 出现正面的次数 m, 与抛掷次数 n 之比, 为该枚硬币正面出现的频率.

一般地, 有频率的定义:

定义 1.3.1 设对事件 A 进行 n 次试验, 结果 A 发生了 n_A 次, 则称 n_A 为频数, 而称 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 的频率, 记作

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}. \tag{1.3.1}$$

事件 A 的频率具有以下性质.

性质 1.3.1 (1) 非负性: $\forall A, f_n(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: 对必然事件 Ω, 有 $f_n(\Omega)=1$;

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容, 即 $A_iA_j=\phi$, 则

$$f_n\Big(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i) \qquad (\text{有限可加性}).$$

证 (1), (2) 比较明显, 这里只证 (3) 式.

设 A_i 的频数为 $n_{A_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生, 意味着 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至少有一发生, 又因为 A_i 互不相容 (即不能同时发生), 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生次数一定是诸 A_i 发生次数之和, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m}n_{A_i}$, 从而有

$$f_n\Big(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\Big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_{A_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{n_{A_i}}{n}=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

以上三条是最基本的性质, 由此还可以推出以下性质.

性质 1.3.2 (1) 设 ϕ 为不可能事件, 则 $f_n(\phi)=0$;

(2) $f_n(\bar{A})=1-f_n(A)$;

(3) $f_n(A\bigcup B)=f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB)$;

(4) 若$A\subset B$, 则$f_n(B-A)=f_n(B)-f_n(A)$;

(5) $f_n\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}f_n(A_i)$.

由表 1.3.1 还可以看出, 抛掷试验中, 随着抛掷次数的增多, 频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5.

像这样频率趋于稳定值的例子还很多.

例 1.3.2 大数学家拉普拉斯曾研究过法国邮局因信封上没有地址而无法投递的信件数. 这从常识上看, 似乎没有什么规律性, 但经过统计之后惊人地发现, 一年中这类信件所占的比例, 许多年几乎保持不变. 人们据此统计了俄国邮局各年无地址的信件, 在每百万封信中, 无地址信件是: 1906 年 27 件, 1907 年 25 件, 1908 年 27 件, 1909 年 25 件, 1910 年 27 件, 其比例 (频率) 几乎不变.

由上述例子看来，一个随机试验的随机事件 A，在多次试验中的 “频率具有稳定性”. 同时还容易看到，若随机事件 A 发生的可能性大，一般地其频率亦大，反之亦是如此. 由此看来，事件 A 发生的可能性的大小，与其频率大小有密切的关系，加之频率的稳定性，故可用频率来定义概率.

1.3.2　概率

概率的基本性质可以通过恰当地观测统计频率的性质而得到.

1. 概率的直观意义

定义 1.3.2　如果试验次数 n 增多，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在区间 $[0,1]$ 上的某一个数 p 的附近摆动，则定义事件 A 的概率为 p，记作 $P(A)=p$.

我们把概率的这一定义，称为直观定义，或统计定义.

同时指出: 统计概率具有频率所具有的一切性质. 于是有概率论的三条公理:

性质 1.3.3　设 E 为试验，Ω 是 E 的样本空间，即必然事件，ϕ 为不可能事件，事件 A 的概率具有如下性质:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$，对 $A\in\mathcal{F}$(布尔代数);

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_i\in\mathcal{F}, i=1,2,\cdots,n$，且 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

以上性质，可仿照频率的性质 1.3.1 证之. 由此性质还可以推出:

性质 1.3.4　(1) 设 ϕ 为不可能事件，则其概率 $P(\phi)=0$;

(2) $P(\bar{A})=1-P(A),\quad \forall A$;

(3) 若 A 是任意事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(A)-P(B)$;

(5) 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$　(半可加性).

统计定义有如下优缺点:

优点: 它可通过频率来认识概率，而频率的概念非常容易掌握. 事实上，在相当广泛的条件下，任意事件 A 的频率都在一定意义下趋向于它的概率 $P(A)$.

缺点: 数学上不严格. 定义中稳定作何理解？试验多到何种程度？故不便于进行理论的探讨.

2. 古典概率

计算随机事件发生的概率时，有一类特殊的随机现象，这类现象进行的随机试验具有如下两个特征:

(1) 有限性: 试验的全部样本空间的可能结果 (基本事件) 为有限多个;

(2) 等可能性: 试验的每个基本事件发生是等可能的，称之为古典随机试验.

例 1.3.3 (摸球问题) 箱中共有 10 个球: $B_1, B_2, \cdots, B_{10}$, 其中 3 个是红球, 从中任意取一个球, 求取到红球的可能性的大小 (概率)?

解 分析 "任意" 又叫 "随机", 它表示每个球被取到的机会是均等的. 或者说它们被取到的概率相等, 用 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 表示取到球 $B_1, B_2, \cdots, B_{10}$ 的事件, 即

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_{10}).$$

又因为样本空间 $\Omega = \{A_1, A_2, \cdots, A_{10}\}$, 作为必然事件 $\Omega = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_{10}$.

显然, 基本事件 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 两两互不相容, 所以有

$$P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{10}) = 1.$$

计算: $P(A_i) = \dfrac{1}{10}$, $i = 1, 2, \cdots, 10$.

一般地, 古典概型其样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 事件域 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体, $\mathcal{F}$ 中含有 2^n 个事件 (包括 ϕ, Ω), 从概率的有限可加性知,

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n).$$

于是得到每个基本事件 ω_i 的概率为

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

定义 1.3.3 (古典概率) 设 Ω 为一古典概型随机试验且 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 事件 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}$, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中任意 k 个不同的数, 则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{中所含的基本事件数}}{\Omega\text{中所含的基本事件总数}} = \frac{k}{n} \tag{1.3.2}$$

(习惯上亦称 k 是 A 的有利事件数).

这一定义是拉普拉斯于 1812 年提出的, 因它只适合于古典概型场合, 通常称之为古典定义.

例 1.3.3 是一类抽签问题, 机会均等, 故抽签人不必争先恐后. 以下介绍另两类古典概率问题: 分配问题和随机取数问题.

例 1.3.4 (分房问题) 设有 n 个人, 每个人都等可能地被分配到 $N(n \leqslant N)$ 间房间中的每一间去住, 试求下列事件的概率:

(1) A= {某指定的 n 间房中各有 1 人};

(2) B= {恰有 n 间房各有 1 人};