21 世纪高职高专系列规划教材·公共基础课
21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN XILIEGUIHUA JIAOCAI · GONGGONGJICHUKE

GAODENGSHUXUE

高等数学

（二年制）

岳忠玉 沈康顿 主编

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专教育系列规划教材·公共基础课

高等数学

（二年制）

主　编　岳忠玉　沈康顿

副主编　张春玲　张　博

崔永红　胡红亮

西北大学出版社

中国·西安

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．二年制/岳忠玉等编．—西安:西北大学出版社，2004.8

ISBN 7-5604-1963-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.岳…　Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 084676 号

高等数学(二年制)

出版发行	西北大学出版社	**社　址**	西安市太白北路 229 号
电　话	029-88302590	**经　销**	新华书店经销
印　刷	陕西丰源印务有限公司	**版　次**	2004 年 8 月第 1 版
开　本	787×1092　1/16	**印　次**	2004 年 8 月第 1 次印刷
字　数	318 千字	**印　张**	13.75
书　号	ISBN 7-5604-1963-1/O·120	**定　价**	26.50 元(含练习册)

前　言

为适应国家教育部关于高职高专教育的学制从三年逐步调整为两年的发展趋势，陕西省教育厅决定从2004年秋季学期开始在我省部分院校的新设专业启动两年制改革的试点工作。

对高职高专教育进行两年制学制改革是一项系统工程，它必然牵涉到多方面的改革，其中教材建设工作是十分重要的一个方面。《高等数学》是工科、经济管理和财经等各专业的公共基础课，为探索两年制《高等数学》教材的建设，2004年5月在陕西省教育厅的统一安排下，在西北大学出版社的精心组织下，参与两年制改革试点工作的部分院校的教学教师代表，集中对两年制《高等数学》教材的编写作了深入和详细的讨论，最终形成以下共识。

一、两年制《高等数学》教材应按照“以应用为目的，以必需够用”的原则，使学生通过学习能够初步了解、掌握数学的思想和方法，逐步培养学生基本的运算能力、自学能力、综合运用数学知识分析解决简单实际问题的能力以及初步的抽象、归纳能力和逻辑推理能力，以满足培养高等技能型人才的需要。

二、在编写内容的确定上，我们以“宽编窄用，文理兼用”为指导思想，涵盖文、理科所涉及的数学知识、具体内容为：第一章极限与连续，第二章一元函数微分学，第三章一元函数积分学，第四章线性代数初步及第五章概率论与数理统计初步。在具体教学过程中，可根据各校或各专业的实际不讲或选讲某些内容。另外，为便于查找和使用，我们在书后还附有：初等数学常用公式、基本初等函数表及常用的平面曲线、常用积分表、概率统计表及习题答案。

三、在编写过程上遵循以下要求：

1. 不拘泥于数学自身的系统性、逻辑性；

2. 通过工程或经济中的实例，通俗、直观地引入概念；

3. 对基础理论不追求严格的论证和推导，只做简要的说明；

4. 不追求过分复杂的计算和变换；

5. 加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。

四、讲完本书全部内容约需82课时，其中第一章约10课时，第二章约20课时，第三章约18课时，第四章约12课时，第五章约22课时，前三章为必讲内容。如果只讲前三章内容，只需48课时，如果讲完前三章内容，再选讲第四章或第五章的概率部分，约需60课

时，我们建议，一周安排4课时是比较合适的，若要讲完全部内容，应安排一周6课时。

参加本书编写工作的有西安航空技术高等专科学校(岳忠玉、胡红亮、赵芳玲)，陕西国防职业技术学院(沈康顿、成均孝)，陕西财经职业技术学院(张拓)，陕西工业职业技术学院(郝军)，陕西交通职业技术学院(张博、王子燕)，陕西职业技术学院(崔永红)和西安航空职业技术学院(张春玲、李陆军)，全书编写大纲及框架结构安排由岳忠玉承担，最后的统稿、定稿工作由岳忠玉、沈康顿完成。

由于编者水平有限，加之时间仓促，两年制改革的一切又都在摸索当中，因此本教材的不足之处在所难免，恳请使用者不吝赐教，以便这本教材逐步完善，为我国的高职教育改革贡献一份力量。

编　者

2004年夏

目 录

第一章　极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，它刻画了变量与变量之间的相互制约关系；极限是高等数学中不可缺少的理论工具，极限方法是研究变量变化趋势的一种基本方法；连续是高等数学中与极限概念相关的另一个重要概念，它反映的是函数的一个重要性态.

本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，重点介绍极限的基本概念和主要计算方法，并讨论函数的连续性等问题.

§1.1　函数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值和它相对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集，称为函数的值域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这个函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如　$y=2x+3$ 是单值函数，由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 就是一个多值函数.

以后凡是没有特别说明时，本书所讨论的函数都是指单值函数.

由函数的定义知，函数是由定义域和对应法则所确定的，这也是函数的两个要素. 因此，对于给定的两个函数，只要它们的定义域和对应法则完全相同，则可把它们看成是同一个函数，而与自变量和因变量用什么字母表示无关.

例如　$y=\sqrt{x}$ 与 $S=\sqrt{t}$ 表示的是同一个函数. 又如，$y=x-1$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 就是两个不同的函数，因为它们的定义域不同，前者的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，后者的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

函数的表示法通常有三种，即解析法(公式法)、表格法和图形法. 由于用解析法表示的函数关系，便于进行理论分析和数值计算，所以高等数学中所讨论的函数以解析法表示为主.

在给定一个函数时，一般都应标明其定义域，它就是自变量取值的允许范围. 如果一

个函数由实际问题得到，可由所讨论问题的实际意义确定，如果函数是由没有实际背景的数学式子给出的，其定义域是使该式有意义的自变量的集合.

例 1 求函数 $y = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \ln(x - 2)$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 \geqslant 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

解此不等式组得

$$x < x \leqslant 3$$

因此，函数的定域为$(2,3]$.

2. 分段函数

有些函数在定义域的不同范围内，具有不同的表达式，这样的函数叫做分段函数.分段函数在工程技术及日常生活中都会经常遇到.

应当指出的是，分段函数无论分段多少，它总是一个函数，而不是几个函数，在计算分段函数的函数值时，必须把自变量的值代入相应的表达式中去计算.

例 2 作函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

的图像，并求 $f(4)$ 和 $f(-4)$.

解 该函数的图像如图 1.1 所示.

因为 当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \sqrt{x}$

当 $x < 0$ 时，$f(x) = -x$

所以 $f(4) = \sqrt{4} = 2$

$f(-4) = -(-4) = 4$

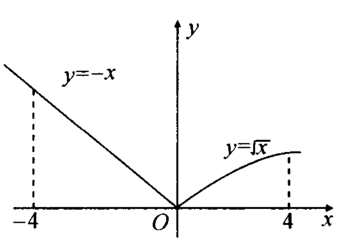

图 1.1

3. 反函数

定义 2 设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，而 $y = f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此往往把 $x = \varphi(y)$ 改写成 $y = \varphi(x)$，称 $y = \varphi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数.它们的图像关于直线 $y = x$ 对称.

二、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 I 内有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在一个正数 M，对于所有的 $x \in I$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界.如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

例如 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内有界.

例如　$g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,但在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$内有界.

2. **单调性**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,对于区间 $\mathrm{I}\subset D$ 内的任意两点x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的,区间 I 称为单调递增区间;
若恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的,区间 I 称为单调递减区间.

例如　函数 $y=x^2$,如图 1.2 所示.

在区间$(0,+\infty)$内是单调递增的,而在区间$(-\infty,0)$内是单调递减的,它在定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

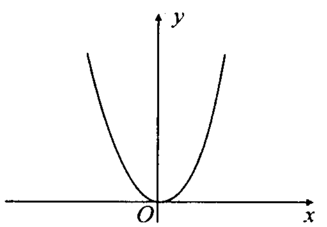

图 1.2

3. **奇偶性**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任意 $x\in D$,若都有 $f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数;若都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于坐标原点.

例如　$y=x^n$(n 为奇数),$y=\sin x$ 都是奇函数,$y=x^n$(n 为偶数),$y=\cos x$ 都是偶函数.而 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

4. **周期性**

设函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的实数 T,使得对于任一 $x\in D$,有$(x+T)\in D$ 且总有

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称$f(x)$为周期函数.T称为$f(x)$的周期.通常说的函数的周期是指它的最小正周期.

例如　函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数;函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 是以$\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数.

三、初等函数

1. **基本初等函数**

在中学已学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.这些函数的定义域、值域、图形和性质列于附录二中.

2. **复合函数**

定义 3　设 y 是u 的函数$y=f(u)$,u 是x 的函数$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域包含于

$f(u)$ 的定义域,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数,称 u 为中间变量.

对于一个给定的复合函数,必须学会分析它的复合过程.

例 3 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=(3x+5)^{10}$　　(2) $y=\sqrt{\lg(1+x^4)}$

(3) $y=\sin 2^{x-1}$　　(4) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$

解 (1) $y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}, u=3x+5$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt{\lg(1+x^4)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=1+x^4$ 复合而成的.

(3) $y=\sin 2^{x-1}$ 是由 $y=\sin u, u=2^v, v=x-1$ 复合而成的.

(4) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=e^u, u=\arctan v, v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成的.

应当指出,不是任何两个函数都可以构成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数.因为 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$,而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,它们无公共部分,对于 $u=2+x^2$ 的定义域中的任何 x 值,都会使形式上的复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 均无意义.

3. 初等函数

定义 4 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的,并能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

例如 $y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin^2 x}, y=\tan x^2+e^{\sqrt{x}}$ 等都是初等函数.

四、几种常见的经济函数

1. 需求函数

需求量是消费者愿意购买并且有支付能力购买某种商品的数量.消费者对某种商品的需求量与商品的价格、消费者的收入、偏好、商品的季节性等多种因素有关,其中市场价格是影响需求量的一个重要因素.现忽略其他因素,假定某种商品的需求量 Q_d 只与该商品的市场价格 P 有关,即

$$Q_d=Q(P)$$

则称函数 $Q_d=Q(P)$ 为需求函数.

一般来说,需求量将随商品价格的升高而减少,因此需求函数是单调减函数.常见的需求函数有:

线性需求函数　$Q_d=a-bP$

二次需求函数　$Q_d=a-bP-cP^2$

幂函数需求函数　$Q_d=kP^{-a}$

指数需求函数　$Q_d=ae^{-bP}$

以上函数中 a,b,c,k 均为大于零的常数.

2. 供给函数

供给函数是指在一定价格条件下,生产者愿意出售,并且有可能出售商品的数量.供给量也是由多种因素决定的,但影响商品供给量的主要因素是商品价格.

设商品的价格为 P,供给量为 Q_s,则供给函数为

$$Q_s = Q(P)$$

一般来说,供给量是随着商品市场价格的上涨而增加的,因此供给函数为单调递增函数.常见的供给函数有:

线性供给函数 $Q_s = a + bP$

二次供给函数 $Q_s = a + bP + cP^2$

幂函数供给函数 $Q_s = kP^a$

指数供给函数 $Q_s = ae^{bP}$

以上函数中 a,b,c,k 均为大于零的常数.

3. 成本函数

成本就是生产者用于生产商品的费用,它包括固定成本和可变成本.

固定成本是不随产量变化而变化的成本,如厂房、设备等.可变成本是随产量变化而变化的成本,如原材料、燃料和动力费、生产工人的工资等.

若总成本用 C 来表示,固定成本用 C_0 表示,可变成本用 C_1 表示,则有

$$C = C_0 + C_1$$

一般认为 C_0 是不变的,而 C_1 是产量 Q 的函数,所以成本 C 也是产量 Q 的函数,即

$$C = C_0 + C_1(Q)$$

这就是成本函数.显然,成本函数是随产量的增加而增加的,所以成本函数是单调增函数.常见的成本函数有一次函数、二次函数等.

4. 收入函数

收入是指生产者生产的商品售出后的所得,用 R 表示.

某商品的销售总收入取决于该商品的消量 Q 和价格 P,等于二者的乘积

$$R = QP$$

而价格 P 又随销量 Q 的变化而变化,即 $P = P(Q)$,因此收入 R 也是销量的函数

$$R = QP(Q)$$

这就是收入函数.

5. 利润函数

利润指的是生产者的收入扣除成本后的剩余部分,用 L 表示,即

$$L = R - C$$

这就是利润函数.

五、列函数关系举例

例 4 火车站收取旅客携带行李费规定如下:不超过 20 公斤的物品免费,超过 20 公斤但不超过 50 公斤的部分每公斤收费 0.30 元,超过 50 公斤的部分按每公斤 0.50 元收费,试求收取的行李费与携带物品重量的函数关系.

解 设携带物品重量为 x 公斤,收取行李费为 y 元,依照题意,应有三种情形:

第一种情形:当重量不超过 20 公斤,即 $x \in [0,20]$ 时,$y = 0$;

第二种情形：当重量超过20公斤，但不超过50公斤，即 $x \in (20,50]$ 时，$y = (x-20) \times 0.3$；

第三种情形：当重量超过50公斤，即 $x \in (50,+\infty)$，$y = (50-20)\times 0.3 + (x-50) \times 0.5$. 所以，所求函数为

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0.3(x-20) & 20 < x \leqslant 50 \\ 9 + 0.5(x-50) & 50 < x < +\infty \end{cases}$$

例5 在机械中常见到一种由柄边杆机构如图1.3所示. 半径为 r 的主动轮以等角速度 ω 旋转时，长为 l 的连杆 AB 就带动滑块 B 作往复直线运动，运动从 $\varphi = 0$ 开始，求滑块 B 的运动规律.

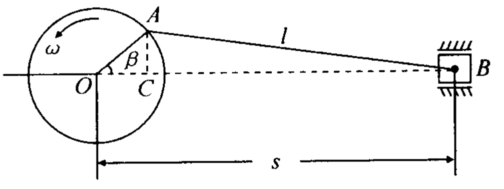

图 1.3

解 设运动开始后，经过时间 t 秒时，滑块 B 离 O 点的距离为 s. 求滑块 B 的运动规律就是建立 s 与 t 之间的函数关系.

因为运动从 $\varphi = 0$ 开始，经过时间 t 后主动轮转了 φ 弧度，那么

$$\varphi = \omega t$$

而

$$s = OC + CB$$

其中

$$OC = r\cos\varphi = r\cos\omega t$$

$$CB = \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{l^2 - (r\sin\omega t)^2}$$

所以

$$s = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$$

这就是滑块 B 的运动规律. 函数的定义域为 $[0,+\infty)$.

例6 已知某种商品的需求函数是

$$Q = 200 - 5P$$

试求该商品的收入函数以及销售20件该商品时的总收入.

解 由需求函数可得

$$5P = 200 - Q$$

$$P = 40 - \frac{Q}{5}$$

因此该商品的收入函数为

$$R = QP = Q(40 - \frac{Q}{5}) = 40Q - \frac{1}{5}Q^2$$

当销售 $Q = 20$ 件时，总收入

$$R = 40 \times 20 - \frac{20^2}{5} = 720$$

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{\lg(1 - x)}$　　(2) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} - \arcsin\dfrac{2x - 1}{7}$

2. 设 $f(x) = x^3 - 2x + 3$，求 $f(1)$，$f(-\frac{1}{a})$，$f(t^2)$，$[f(b)]^2$，$\dfrac{1}{f(c)}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x & -1 < x < 0 \\ 2 & 0 \leqslant x < 1 \\ x - 1 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

(1) 求该函数的定义域，并作出函数的图像.

(2) 求 $f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(0.7)$，$f(2)$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$　　(2) $f(x) = \arccos x$

(3) $f(x) = x \cdot \tan x$　　(4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y = e^{2x}$　　(2) $y = [\arcsin(ax + b)]^2$

(3) $y = \tan\sqrt{3x + 1}$　　(4) $y = \lg\sin^2 2x$

6. 在半径为 r 的球内作内接圆柱体，试将圆柱体的体积 V 表示为高 h 的函数，并求此函数的定义域.

7. 已知一个单三角脉冲电压，其波形如图 1.4 所示，试建立电压 U(伏) 与时间 t(微秒) 三间的函数关系.

8. 已知某厂生产某种产品的成本函数为

$$C = 500 + 2Q$$

其中 Q 为该产品的产量，如果该产品的售价定为 6 元，试求该产品的利润函数.

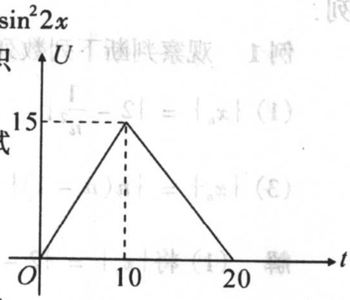

图 1.4

§ 1.2　极　　限

一、数列的极限

考察下面几个数列：