数量经济学系列丛书

# 运筹学

## 经济优化方法与模型

夏少刚 著

清华大学出版社

数量经济学系列丛书

# 运筹学

## 经济优化方法与模型

夏少刚 著

清华大学出版社

北京

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学：经济优化方法与模型/夏少刚著. —北京：清华大学出版社，2005.9
(数量经济学系列丛书)
ISBN 7-302-11436-6

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 夏…　Ⅲ. 运筹学—高等学校—教材　Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082648 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：龙海峰
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　印张：14　插页：1　字数：279 千字
版　次：2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-11436-6/F·1274
印　数：1～4000
定　价：19.80 元

# 前　言

本书共分 3 部分。

1. 总论(运筹学各分支简介)：介绍运筹学的特点、发展概况、各分支研究问题的对象、基本的分析思想，以及一些新方法等。目的是使读者对这些分支有一个大概的了解，为以后深入学习某一分支引路。

2. 线性规划：详细介绍线性规划的理论和方法，介绍单纯形法等算法及近年来的一些新进展、新成果(其中包括作者的若干研究成果)。这部分内容博采众长，力求做到既简明扼要，又严谨无隙。

3. 非线性规划：介绍非线性规划的基本理论和主要方法，并对用线性规划的理论、方法处理非线性规划的若干问题做了新的尝试和探索。

本书适合应用数学、运筹学、数量经济、管理科学、经济信息、数理金融和数理统计等专业学生学习。其中打 * 号的章节相对独立，可以根据读者的情况取舍。第 2 章也可在第二篇甚至第三篇之后讲授。

本书也可作为相关专业的研究生和运筹学工作者的参考书。

由于水平所限，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

作　者

2005 年 3 月

# 目　　录

## 第三篇 非线性规划

# 第一篇　总论（运筹学简介）

# 第 1 章　运筹学的含义及其特点

## 1.1　运筹学的含义及发展概况

运筹学在欧美简称 O. R.（Operations Research）。日本译为“运用学”，我国译为“运筹学”，除了“运用”，又充实以“筹划”，意义更深。它是许多管理、生产、设计和科研等单位所需要的工具。其定义，到目前为止已是数以百计，按世界上最早出现的运筹学会（1948 年）——英国运筹学会所下的定义，运筹学是运用科学方法来解决工业、商业、政府和国防等部门里有关人力、机器、物质和资金等大型系统的指挥或管理中出现的复杂问题的一门科学。

一般来说，运筹学所能做的事情就是：把当事人所提出的问题及涉及的系统，以科学的态度弄清楚，并以科学的语言表达出来。若有可能，尽量用数学语言来描述，同时又必须以严格的科学态度搜集和分析可以得到的资料，挑选出其中与问题有关的，并看看缺少哪些有用的资料。假若这些缺少的资料由于某种原因不能搜集到，则要考虑会产生什么结果，特别要着重研究那些可控制的因素，注意它们的变化对整个系统可能产生的影响。研究的目的就是要对问题所涉及的系统得到确切的了解，提出解决问题的途径，以便最优地控制系统使之服务于当事人的最大利益。

可见，运筹学的目的就是要帮助当事人作出决策：对情况作出客观分析，对各种可能出现的情况作出科学估计，提出控制系统的途径和方法。

运筹学是在第二次世界大战中孕育和发展起来的。战后，英国于 1948 年成立了运筹学俱乐部（1953 年改为“运筹学”学会），1950 年出版了《运筹学季刊》；美国 1949 年成立了运筹学委员会，同年出版了《运筹学》。运筹学被引进我国是 20 世纪 50 年代的事。1980 年中国运筹学会成立，1982 年出版了《运筹学杂志》（后改为《运筹学学报》）。现在全世界已有 30 多个国家成立了全国运筹学会，与运筹学有关的刊物估计在 40 份以上。1959 年由美、英、法倡导建立了国际运筹学会（IFORS），至今已有成员国会员 44 个，国际或区域性会员 7 个，共举行 16 届国际运筹学会议。我国 1981 年 7 月第一次以会员国的身份参加了第 9 届国际运筹学会议，1982 年正式加入，1984 年 8 月在美国参加了第 10 次会议，并在分组会上作了报告，第 15 届大会已于 1999 年 8 月在北京举行，这是中国运筹学会首次承办的国际运筹学会议。

总之，正如其他科学一样，运筹学的发展也是一种从小到大，从简单到复杂的过程。

## 1.2 运筹学的特点——注重算法的研究

由运筹学的含义可以看出，它除了具有多分支之外，一个最显著的特点就是为重大实际问题提供科学有效的解决方法。因此对算法的研究始终是运筹学的首要任务，这也是运筹学具有针对性和实用性两大特点的体现，所以对算法本身，我们必须有一个正确的认识和全面的了解。

算法体系的轮廓大致描绘如图 1.1 所示。

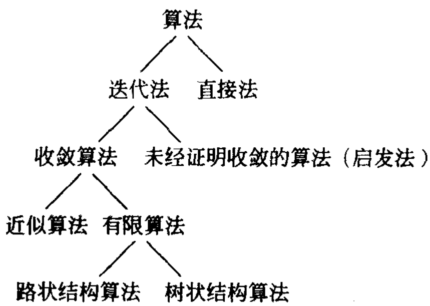


图 1.1

**算法**：可理解为“用以解决一个以数学语言叙述出来的问题的方法”，这囊括了所有的算法。

**直接法**：某些算法并不是以迭代方式进行的。例如，求导数：$y'=(x^n)'=nx^{n-1}$。

**迭代法**：大多数的算法都是以迭代方式进行的。例如，某些子程序重复使用几次，求解：$f(x)=0 \Leftrightarrow x_k=\varphi(x_{k-1})$。

**未经证明收敛的算法（启发法）**：迭代法不一定收敛于所求的解，这就是称为启发法的算法。

**近似算法**：有些收敛算法并不保证得到精确解，得到的只是一个近似解。它们不是有限算法，每多迭代一步，就会向精确解靠近一步，如牛顿法：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ 等。}$$

**有限算法**：能保证经有限次迭代即可得到精确解的收敛算法。

**路状结构算法**：许多有限算法皆有路状结构，即是说一次迭代连着一次迭代而不产生分岔的迭代序列（图 1.2）。例如，求矩阵的逆、线性规划中的单纯形法、几种最短路算法和网络中的最大流问题等。

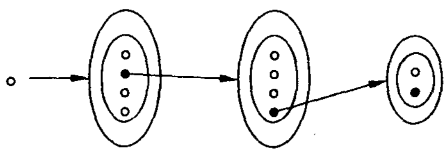

图 1.2

**树状结构算法**：在其余的有限算法中，迭代序列形成一棵由几条平行的枝形成的树（图 1.3）。大多数树状搜索算法属于此类，如动态规划、分支定界法和有界列举法等。

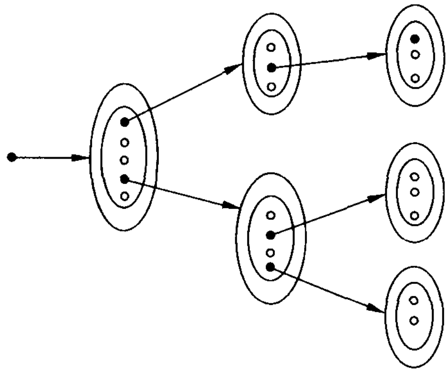

图 1.3

近似算法倾向于具有路状结构，而启发法则可认为是一种简约树状结构算法，它按某种规则舍弃一些候选者，启发法的结构可表示如图 1.4 所示。

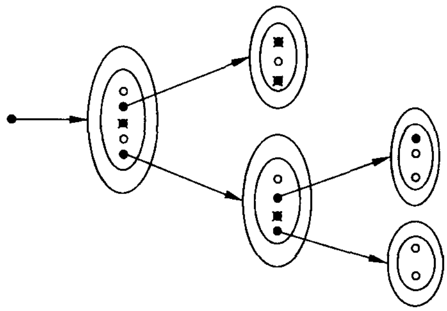

图 1.4

有些问题不存在有效的收敛算法，即不存在一种可接受的时间内收敛于所求解的算法。这种情况下，启发法是一种有力的工具。

衡量一种算法好坏的重要标准是算法的计算次数或计算时间，显然计算次数与问题的规模有关。设问题的规模为 $n$，如果存在 $n$ 的一个多项式 $P(n)$，使得该问题的任何实例都可以在计算次数 $F(n)=O(P(n))$ 之内解出，则称该问题存在多项式的时间算法，简称多项式算法，其中 $P(n)$ 称为计算的复杂性。一个问题若存在多项式算法，就认为它可以有效地用计算机求解，该算法就称为好算法。若算法的计算次数 $F(n)=O(a^n)$ $(a\geqslant 2)$，则称为指数型的算法。一般认为指数型算法不是好算法。

存在这样一类问题，其目前最快算法所需计算次数是 $n$ 的指数函数而非多项式，所以 $n$ 略大时，计算机就不能胜任，故以其在计算上难于对付而闻名，被称为 NP-Complete 问题，如旅行售货员问题、时间表问题等。数学家强烈地认为(但并未证明)：人们不可能找出一个有效算法这一事实是 NP-Complete 问题的固有性质。他们相信，不会有有效算法

存在(如其一具有有效算法,余者皆然)。因此,对这类问题,寻找近似解的有效算法便自然成为人们追求的方向。

然而,对算法的认识并未到此完结,人们很快发现上述复杂性概念只涉及到算法在最坏情况下的性态。而这种最坏情况在实际中发生的概率究竟有多大并未予以考虑,以致出现了多项式算法反倒不如非多项式算法在实算中有效的奇怪现象。例如,单纯形算法已被实践证明是普遍实用和非常有效的,但人们也举例证明了它不是多项式算法,哈奇杨算法已被证明是多项式算法,但在许多实践中,其计算速度反比单纯形算法慢得多。这说明用算法在最坏情况下的性态来区别好坏不是最科学的,而算法的平均性态才是衡量算法好坏的最有说服力、最重要的标志。因此,那种仅凭一、两个并不具有代表性的例子来肯定或否定一种算法的思想和行为是不可取的。

对于解决同一类问题的各种算法,优劣立判的算法并不常见,往往是尺短寸长,各有特点。方法一可能在解决 A 子类问题上更有效,方法二可能在解决 B 子类问题上更优越,应当实事求是地进行具体分析,不宜简单地肯定一种而否定另一种。那种认为某类问题已有有效算法,从而对新提出的一些算法一概采取轻视,过于挑剔甚至排斥态度,这对算法的发展是有害的。对算法也应采取“百花齐放,推陈出新”的方针,特别是对比较成熟领域的基本算法,哪怕是稍有些改进,也可能产生较大的经济效益,因此更加不能忽视。

算法的发展是没有穷尽的,人们对算法的认识也在逐步深入,期待着有更多的好算法出现,为社会服务,为人类造福。

# 第 2 章　运筹学各分支简介

运筹学作为一门学科，在理论和方法上取得了巨大的进展。现在介绍一下各分支研究问题的对象和基本的分析方法，使读者对它们有一个概貌的了解。

作为一门学科来说，运筹学的内容可以大致表示如下：

- 运筹学
  - 确定性模型
    - 优选，统筹
    - 数学规划
      - 线性
      - 非线性，几何
      - 整数，参数，多目标
    - 组合最优化
    - 图论，网络流
    - 动态规划
    - 投入产出
  - 随机性模型
    - 决策
    - 对策
    - 排队，更新，维修，可靠性
    - 存储
    - 随机控制
    - 模拟

下面对其中的主要分支，分别进行介绍。

## 2.1　数 学 规 划

数学规划所要解决的问题就是要在某种约束条件之下，决定某些可控制的因素应该取什么样的值，使得所选定的目标达到最小(或最大)。用数学的语言来表示，就是要解决下述极值问题：

$$\min f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}\in S,$$

其中 $S$ 表示满足约束条件的可行解的集合。

极值问题虽然早已存在，但现在考虑的数学规划问题与古典的极值问题却有很大的差别：(1)古典方法只能处理当 $f(x)$和可行域 $S$ 很简单的情况，而实际中所出现的问题，$f(x)$和 $S$ 一般都很复杂；(2)古典方法只能处理 $n$ 比较小的情形，如 $n=3,4$，而实际中 $n$ 一般都相当大，个别问题的 $n$ 甚至上百万；(3)古典方法往往满足于一个表达式，而实际中则需要把所需数值具体求出。基于上述原因，要想解决数学规划问题，必须另辟新路。实际上，自从 Dantzig 在 1947 年发表关于解线性规划(即 $f(x)$为 $x_1,\cdots,x_n$的一次式，$S$ 由$x_1,\cdots,x_n$的一些线性不等式组成)的单纯形法以来，数学规划已得到非常迅速的发展，

形成许多分支，成为近代应用数学的一个重要组成部分。由于它的发展，使得有关学科，如凸分析、数理经济学和应用泛函数等也得到相应的发展。国际数学规划讨论会于 1970 年成立，有关杂志约 10 种，国际数学规划讨论会至今已召开 12 届，我国第 11、12 届均有人参加，会议设立了 Fulkerson 奖（1979 年始）和 Dantzig 奖（1982 年始），授予那些在数学规划方面具有开创性成绩的工作者。

本书将详细介绍数学规划的若干分支。

## 2.2　图与网络方法

图指由一组给定的点（称为顶点）及一组连接这些点的线（称为边或弧）所组成的总体（如交通图），而图论则是研究图的理论。图论的产生可以上溯到 18 世纪，但它得到重视而且逐渐成为一门学科，则是 20 世纪 30 年代之后的事。特别是 50 年代以来，由于许多具有离散性的问题皆可以通过图来表示，使得图论的研究越来越为人们所重视。例如：

兰姆赛问题（Ramsey）：任意 6 个人在一起，若不是有 3 个人彼此相互认识，必然有 3 个人互不认识。

将此问题化为图 2.1 进行分析：视 6 个人为 6 个顶点，彼此认识，用实线相连接；彼此不认识，用虚线连接。论证至少存在一个实三角形或虚三角形。任取一点 $V_1$，它与其他 5 点的连线中至少有 3 条同为实线或同为虚线，不妨假设为实线，而另一端点分别为 $V_2, V_3, V_4$。这后 3 个顶点形成的三角形若是虚线，则问题已经解决，不然则至少有一条边为实线，从而又与已知实线构成一实三角形，故问题得证。

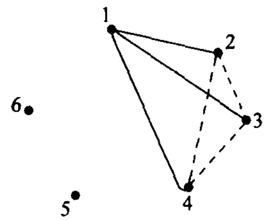

图　2.1

可见有时用图来处理问题很有效，并且形象直观（如哥尼斯堡七桥问题）。许多有经济意义的问题都归结为图与网络（边上有各种数据的连通图叫做网络，数据又叫权）。下面将分别介绍最短路问题、最短网络和作业时间的优化。

**（一）最短路问题**

在给定网络中求指定两点的最短路是图论中的一个基本问题，此问题已有有效算法。

用 $d_{ij}$ 表示连接顶点 $i$ 和 $j$ 的线段长（若无，则视 $d_{ij}=+\infty$），现在要从点 1 出发，走到 $n$（图 2.2）问怎样走路程最短？

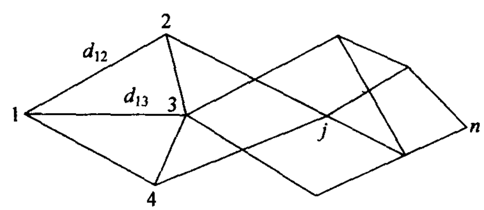

图　2.2

考虑从点 1 到点 $j$ 的路，按中途所经过的线段数目分类，用 $d_j^m$ 表示从点 1 到点 $j$ 且限制中途经过的线段数目不超过 $m$ 的这类路中的一条最短路之长。研究 $d_j^{m+1}$，即所经线段数目为$(m+1)$时的最短路长，易见它或者等于 $d_j^m$，或者等于$\min\limits_{k\neq j}\{d_k^m+d_{kj}\}$，于是有

$$d_j^{m+1} = \min\{d_j^m, \min_{k\neq j}(d_k^m + d_{kj})\} \tag{2.1}$$

而 1 到 $n$ 的最短路即为 $d_n^{n-1}$。

分析计算量：关系式(2.1)中，$m$ 取 1，2，…，$(n-2)$，对每一个固定的 $m$，$j$ 取 2，3，…，$n$。一般说来，对于固定的 $m$ 和 $j$，要经过$(n-1)$次加法运算和比较运算才能得到 $d_j^{m+1}$，因此计算量是 $O(n^3)$。这实际上就是动态规划的顺推算法，按照动态规划的最优化原理："作为整个过程的最优策略，具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略。而对于无向图来说，起点到终点的最短路自然也是终点到起点的最短路"。

当所有线段的长度都是正数，还有更好的算法：Dijkstra 算法（标号算法）。它的计算量为 $O(n^2)$。具体做法是：先对起点标号，每步考察已标号顶点的相邻顶点，把距起点最近的顶点标号，直到终点被标号，然后按标号反向追踪即得到最短路。

**例 2.1** 求图 2.3(a)中 $A$ 到 $B$ 的最短路。

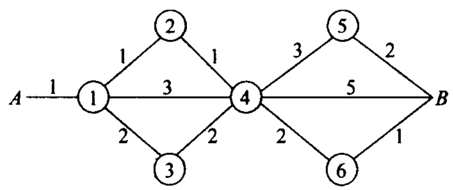


图 2.3(a)

标号过程如图 2.3(b)。

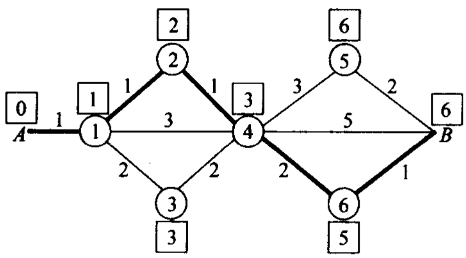


图 2.3(b)

故最短路为 $A\to1\to2\to4\to6\to B$，最短路长为 6。

最短路问题可以直接应用于解决生产实际的许多问题，如各种管道铺设、线路安排、厂区布局、设备更新和选址等。

**（二）最短网络**

最短网络也称最小树。一个实际背景是：在若干城市间架设电话线，如何架设使总长最短？

先讲什么是树？对于图中的任两顶点 $V_i$ 和 $V_j$，如果从一个顶点出发沿着若干边或弧（有方向的边叫做弧），可以达到另一顶点，则称所顺次经过的边和顶点为连接 $V_i$ 和 $V_j$ 的链。如果所连接的顶点重合，即 $V_i=V_j$，则称这样的闭链为圈。一个图中如果任意两顶点之间至少有一条链，则称为连通图，而连通且无圈的图叫做树。

对于含圈的连通图，去掉每个圈的一条边，便可生成一个树，去掉的边不同生成的树也不一样，其中边权和最小的树叫做最小生成树。

求最短网络，首先容易想到的是求最小生成树。目前的方法有所谓破圈法（即任取一个圈，每次去掉其中最长的一条边，直到无圈为止）、顶点扩充法（即任取一顶点，考察以此顶点为一端点的所有的边，取其中最短边的另一顶点为扩充顶点，依次类推，但要注意新扩充的边与已选好的边不能构成圈，直到所有顶点均被扩充为止）等，计算量是 $O(n^2)$。

继而想到在原基础上增加一些新点和连线，扩大成一个新的网络，要求在此新网络上找出一个子网络，它是连通的，包含原图中的点，并且边权和最小，这种网络称为斯坦纳最小树（树中新增加的点叫斯坦纳点，简称斯点）。它的边权和显然小于最小树的边权和。现已证明：

1. 任一斯点均为夹角为 120°的 3 条线段交点；
2. $n$ 顶点的图形最多含 $(n-2)$ 个斯点。

3 个顶点的斯坦纳最小树很容易找出：

以 $AC$ 为边作正△$ACD$，连 $BD$ 交△$ACD$ 的外接圆于 $S$，则 $S$ 即为斯点（见图 2.4）。

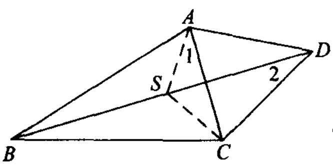


图　2.4

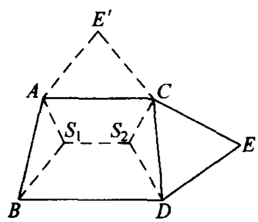


图　2.5

易证，$SA+SB+SC<AC+BC$（注意：$SA+SC=SD$）。

当 $n=4$ 时，方法仍是用一新点 $E$ 代替两原顶点 $C$，$D$（△$ECD$ 成一正三角形），先求△$ABE$ 的斯点 $S_1$，连 $S_1E$ 交外接圆于 $S_2$，则 $S_1$ 和 $S_2$ 即为所求（图 2.5）。同样若以新点 $E'$ 代替 $A$，$C$，则可另得两个斯点，如此递归进行，可以求出任意个顶点的所有斯点。

存在的问题是图形数目太多（当 $n=7$，$S\leqslant 5$，共有 62370 个图形），有人（Garey 等）已证明最短网络是 NP-complete 问题。因此，$n$ 略大时，如 $n\geqslant 100$，计算机就不能胜任，目前可做 10 个顶点的问题。

现在研究方向有二：其一是对具有特殊性质的点集构造斯坦纳树。例如，正 $n$ 边形顶点集合，当 $n>5$ 时，斯坦纳最小树即是最小生成树；其二是对一般的集合构造次优树。即不一定最短但接近最短，通常以最小生成树为次优树。人们将点集 $A$ 定义为

$$r(\mathbf{A})=\frac{\text{斯坦纳最小树长}}{\text{最小生成树长}}$$

称 $\rho=\inf\limits_{A} r(\mathbf{A})$ 为最小斯坦纳比例，猜测 $\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正三角形的例子知 $\rho\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$，曾证得 $3<n<5$ 时，$\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}$，黄光明[3]证明了 $\rho\geqslant 0.8$（1983 年），钟金芳蓉和 Graham 又宣布了 $\rho=0.8241$（计算机结果），已经很接近了。最近（2000 年）我国运筹学家越民义[4]证明了猜测为真。替代结果，最坏情形增加 13.4％的网络长，对随机情形网络长只增加 3％。

**（三）作业时间的优化**

作业时间的优化问题，如大规模工程、房屋建筑、产品开发设计、维修及工厂的开工投产活动等一次完成的规划项目，如果对完工时间要求很严（如附有罚款条件），那么采用网络分析，以缩短工时，则具有特别重要的意义。

运用网络描述规划，制作进度表，可以有以下几方面的好处。

1. 有助于管理者系统、全面地考虑规划，弄清程序，便于估计完成时间和找出可能的改进方案，从而加快规划的实现。

2. 能提供工程计划的简明概况，其形式便于有关部门进行评论和参考，从而便于汇集各方面的意见，找出存在的问题和延误工程的原因。

3. 对网络进行分析可找出关键路线，这就是网络中所需时间最长的一组活动。网络的解可以揭示缩短哪些活动的时间，有助于缩短整个完工时间，还可揭示在哪些活动中加班是无益的。某些活动可延长时间而并不会延长总的完工时间，这就明确了各个工序或过程在网络中的地位。

4. 有助于识别有关任务及其时间顺序关系，从而可更好的分派职责，更有效地运用资源。当出现问题时，网络可用来确定各种可能的其他解决方法。

5. 网络分析可以说明各项活动的最早可能开始时间及最迟允许完工时间。

进度表法被称为网络计划技术最早是在 1957 年由美国杜邦公司研究出来的。最初用于计划和管理化学工厂的筹建，其结果使该项工程比原计划缩短了两个月时间。随后又将此方法用于维修，使原来需停工 125 小时的工程缩短为 78 小时，取得显著效果。

还有其他一些典型问题，都可以用图论方法来处理，如最大流问题、最小费用流问题、匹配（无公共顶点的边所组成的集合）问题、哈密顿回路和旅行商问题等。

总之，图论所研究的问题主要分两类：一是给定的图中具有某种性质的点是否存在？若存在有多少？或至多（少）有多少？二是如何构造一个具有某些性质的图或子图？