高师函授教材

JINSHI DAISHU

迟志敏 刘清祥 贺昌亭 编

近世代数

高师函授教材

近世代数

（第二版）

迟志敏　刘清祥　贺昌亭

吉林教育出版社

高师函授教材

近世代数

迟志敏 刘清祥 贺昌亭

*

吉林教育出版社出版 吉林省新华书店发行
长春科技印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 11.625印张 250,000字

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷
印数：1—4,500册
统一书号：7375·445 定价1.90元

第二版说明

本书第一版是按东北三省高师函授教材协作会议精神编写的。1984年教育部颁发了中学教师进修高等师范本科《近世代数教学大纲》。根据大纲的要求和东北三省教育学院、东北师大以及其他兄弟院校使用的意见，进行了全面修改。修改主要有两个方面：一、精简了内容；二、从进一步便于函授学员自学、培养能力的角度作了改写。具体如下：

1　去掉了第五章的第六节、第六章模、第七章格与布尔代数。

2　第四章增加了多项式环一节。

3　每章开头明确列举了本章要讲的几个问题，末尾增加了内容提要。

4　每节明确分段，每段都有明确的标题。

5　对例题进行了精选，有删有增，特别是大多数例题都写了解题思路。对练习题与习题也进行了精选。

6　部分章节在内容安排上作了调整，对大部分章节作了改写。

参加本书审稿会的东北三省教育学院的同志们认真审阅了本书原稿，并提出了宝贵意见，在此，向他们表示感谢。也感谢对本书第一版提出宝贵意见的同志们。

本书是高师函授教材，也可作为高师院校《近世代数》课程的参考书和中学数学教师自学的参考书。

由于水平所限，这第二版一定还有不妥之处．衷心希望广大读者提出批评指正。

编　者

1985年10月

目　　录

第一章　集合与映射

这一章我们介绍集合、映射、分类与等价关系等几个基本概念．这些基本概念是学习本门课程的预备知识。具体说本章讲三个问题：

1．集合及有关术语；

2．映射、映射类型及例子，变换，

3．集合的分类与等价关系。

§1 集　　合

一、集合的概念与表述方法

我们已经知道数集即任意一些数的总体的概念．因此，对于集合这一数学用语我们并不陌生，也不会很费解．由于在数学上涉及的事物不限于数，而从事物的总体上考虑问题又是代数学的一个重要特点，因此有必要把“事物的总体”这样一个概念明确起来，这在数学上通常就是用集合这个术语来表达的．于是我们可以说：

任何一些（没有重复的）事物的总体叫做集合（也简称为集）．总体中的每个事物叫做元素．

含有限个元素的集合叫做有限集，含无限多个元素的集合叫做无限集．

我们约定：不含任何事物的总体也叫集合，特别地，把

它叫做空集合，记作ϕ. 空集被认为是有限集.

用大写的拉丁字母A，B，C，…表示集合；小写的拉丁字母a，b，c，…表示元素. 特别地，用$\boldsymbol{N}$表示自然数集；用$\boldsymbol{Z}$表示整数集；用$\boldsymbol{Q}$表示有理数集；用$\boldsymbol{R}$表示实数集；用$\boldsymbol{C}$表示复数集.

如果a是集合A里的元素，就说a属于A或A含有a，记作$a\in A$；否则就说a不属于A或A不含有a，记作$a\notin A$.

如果两个集合A与B含有完全相同的元素：$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$，则称$A$与$B$相等，记作$A=B$.（记号“$\Longleftrightarrow$”的含意是“当且仅当”）.

下面介绍表述一个集合A的方法，一般有三种方式：

（1）用语言说出集合A是由哪些元素组成的；

（2）在表示集合的字母后面点三个点，随后写出全部元素. 例如

$$A：0，-1.$$

（3）用符号$A=\{\cdots\}$表示A是由括号里的元素所组成的集合，而在括号中可以写出A的全部元素，也可以用适当的数学符号指明A的元素所应满足的条件. 例如

$$A=\{1，-1\}，B=\{x|x^2-1=0\}.$$

前者具体地写出A是由1，-1两个数组成，后者清楚地表明A是由二次方程$x^2-1=0$的根所组成. 一般地，在括号中竖线后边指出A中元素所应具有的性质. 显然它们都确切地描述了一个集合. 这里是用不同方式描述了同一个集合，即$A=B$.

二、子集、交集、并集、笛卡尔积集、幂集和补集

设A，B为任意两个集合.

子集：若集合A中的元素都在集合B中，即若$x \in A$有$x \in B$，则称A是B的子集，记作$A \subseteq B$，读做“A含于B或B包含A”。

若A是B的子集，且B中有元素不在A中，即若$A \subseteq B$但$A \neq B$，则称A是B的真子集，记作$A \subset B$。

规定空集ϕ是任意集合的子集。

例如，自然数集N是整数集Z的子集且是真子集，即$N \subset Z$；

$A=\{1, -1, i, -i\}$是$B=\{x \mid x^4-1=0\}$的子集，但A不是B的真子集，即$A \subseteq B$。

交集：一切既属于A又属于B的元素构成的集合，叫做A与B的交集，记作$A \cap B$。即

$A \cap B=\{x \mid x \in A$同时$x \in B\}$. 如图1·1。

例如，若$A=\{1, -1\}$，$B=\{0, 1\}$；则$A \cap B=\{1\}$，

又若$N_0=\{n \in Z \mid 2 \mid n\}$，则$N \cap Z_0=\{2, 4, 6, \cdots, 2m, \cdots\}$。

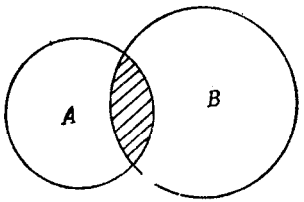

图1·1

并集：一切属于A或者属于B的元素构成的集合，叫做A与B的并集，记作$A \cup B$。即

$A \cup B=\{x \mid x \in A$或$x \in B\}$. 如图1·2。

例如，若$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{$甲，乙，丙，丁$\}$，则

$A \cup B=\{1, 2, 3, 4,$ 甲，乙，丙，丁$\}$。

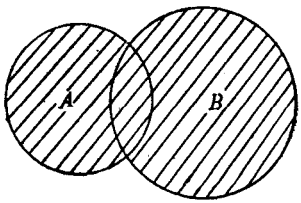

图1·2

又 $Z \cup R = R$.

笛卡尔积集：集$\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$叫做A与B的笛卡尔积集记作$A\times B$. 即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}.$$

例如，若 $A=\{1,0,-1\}, B=\{x,y\}$，则

$$A\times B=\{(1,x),(1,y),(0,x),(0,y),(-1,x),(-1,y)\}$$

$$B\times B=\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}.$$

幂集：A的所有子集构成的集合，叫做A的幂集，记作$P(A)$. 即

$$P(A)=\{Z|Z\subseteq A\}$$

例如，若$A=\{1,0,-1\}$，则

$$P(A)=\{\{1\},\{0\},\{-1\},\{1,0\},\{1,-1\},\{0,-1\},A,\phi\}.$$

为了定义补集，首先说明全集. 一些集合常常是给定集合的子集，把这个给定集合叫做相对于那些子集的全集用符号I表示. 就是说全集包含了所要研究的各个集合的全部元素. 现在来定义补集.

补集：集$\{x|x\in I$ 但$x\notin A\}$ 叫做集合A的补集，记作$A'=\{x|x\in I$，但$x\notin A\}$，如图1.3的长方形表示全集I，圆表示集合A，阴影部份表示集合A的补集A'.

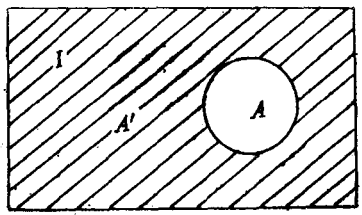

图1.3

由补集的定义，立即可得性质：

A'是A的补集$\Longleftrightarrow A\cup A'=I$，$A\cap A'=\phi$，这里$A$为全集$I$的任一子集。

例如，设$I=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$A=\{1,3,5.\cdots 2n-1,\cdots\}$，$B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$。则有

$$A\cup B=I,\quad A\cap B=\phi,$$

故B是A的补集，当然A也是B的补集，其实A与B互为补集。

三、交集、并集、补集的性质

L_1 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

L_2 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

L_3 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

L_4 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

L_5 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

L_6 对合律 $(A')'=A$，其中A是全集I的子集；

L_7 摩根法则 $(A\cup B)'=A'\cap B'$，

$(A\cap B)'=A'\cup B'$，

其中A，B是全集I的子集。

以上这些性质一般比较容易证明它的正确性，这里只选择L_4和L_7给出证明，其余留给读者证明。

证L_4。我们只证$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$另一个可以类似证之。

任取$x\in A\cup(B\cap C)$，那么$x\in A$或$x\in B\cap C$。

若$x\in A$，则$x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$，故$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

若$x\in B\cap C$，则$x\in B$，$x\in C$．那么$x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$，故$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$．于是总有

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

另一方面，任取$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，那么$x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$．因而必有$x\in A$或$x\in B$，$x\in A$或$x\in C$．当$x\in A$时，一定有$x\in A\cup(B\cap C)$；当$x\notin A$而$x\in B$，$x\in C$时有$x\in B\cap C$，故$x\in A\cup(B\cap C)$．于是总有

$$A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

因此

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$ 证完．

再证L_7．我们只证明$(A\cup B)'=A'\cap B'$，另一个可类似证之．

因$(A\cup B)\cup(A'\cap B')\xlongequal{L_3}A\cup(B\cup(A'\cap B'))\xlongequal{L_4}A\cup((B\cup A')\cap(B\cup B'))=A\cup((B\cup A')\cap I)=A\cup(B\cup A')\xlongequal{L_2}A\cup(A'\cup B)\xlongequal{L_3}(A\cup A')\cup B=I\cup B=I.$

即

$$(A\cup B)\cup(A'\cap B')=I \qquad (1)$$

又因$(A\cup B)\cap(A'\cap B')\xlongequal{L_3}((A\cup B)\cap A')\cap B'\xlongequal{L_2}(A'\cap(A\cup B))\cap B'\xlongequal{L_4}((A'\cap A)\cup(A'\cap B))\cap B'=(A'\cap B)\cap B'\xlongequal{L_3}A'\cap(B\cap B')=A'\cap\phi=\phi.$ 即

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\phi \qquad (2)$$

于是由(1)与(2)知$(A\cup B)'=A'\cap B'$．证完．

四、集合交、并概念的推广

集合交、并的概念可以推广到任意多个集合上去．设集

合族$\{A_\alpha|\alpha\in D$①$\}$

集$\{x|x$ 属于每个$A_\alpha\}$叫做集合族$\{A_\alpha|\alpha\in D\}$的交集，记作$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha$。即

$$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x|x\text{属于每个}A_\alpha\}。$$

当 $\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\phi$时，称集合族$\{A_\alpha|\alpha\in D\}$是不相交的。

集 $\{x|x$ 属于某一个$A_\alpha\}$ 叫做集合族 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 的并集，记作$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$。即

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x|x\text{ 属于某一个}A_\alpha\}。$$

练 习 一

1. 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$. 并写出$P(A)$，$P(B)$.

2. 设$I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,c,d\}$，$B=\{b,d,e\}$，求A'，B'，$A'\cup B'$，$A'\cap B'$，$(A\cup B)'$，$(A\cap B)'$.

3. 证明：$A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A\Longleftrightarrow A\cup B=B$.

4. 证明：$A=B\Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

5. 令$A-B=\{x|x\in A$但$x\overline{\in}B\}$，证明：

$A-B=A-(A\cap B)$，$A-(A-B)=A\cap B$.

6. 证明L_3，L_5，L_6.

§2 映 射

着眼于事物的变化和相互关联，从事物的变化和相互关

① D 是有限集或无限集

联中寻求分析问题的门径，找出解决问题的线索和方法是代数学的一个重要特点．这种方法在数学上的体现，就是把所要研究的对象——这里把它叫做集合，对它的元素进行比较，从中发现其间的某些联系，这就是下面要定义的重要概念——集合的映射．

一、映射的定义

设 A、B 为任二集合．

定义 1 对集合 A 与 B 给定一种规则（方法）φ，使得 A 中每一元素 a，按照给定的规则 φ，能在 B 中确定唯一的一个元素 a'，记作 $\varphi: a \longmapsto a'$（或 $\varphi(a)=a'$），这样就说（规则）φ 是 A 到 B 的一个映射．a' 叫做 a 在 φ 之下的象，a 叫做 a' 在 φ 之下的原象．

常用以下符号来表示 φ 是 A 到 B 的映射：

$$\varphi: A \longrightarrow B \text{ 或 } A \xrightarrow{\varphi} B.$$

例 1 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1: \quad & a \longmapsto 1 \\ & b \longmapsto 2 \\ & c \longmapsto 3 \\ & d \longmapsto 3. \end{aligned}$$

易知 φ_1 是 A 到 B 的一个映射；

再令

$$\begin{aligned} \varphi_2: \quad & a \longmapsto 1 \\ & b \longmapsto 2 \\ & c \longmapsto 1 \\ & d \longmapsto 1. \end{aligned}$$

φ_2也是A到B的一个映射；

若令

$$\varphi_3:\quad a\longmapsto 2$$
$$b\longmapsto 3$$
$$d\longmapsto 1.$$

由于A中的c在φ_3之下没有象，故φ不是A到B的映射.

例 2 设$A=$｛甲，乙，丙，丁｝，$B=$｛张，王，李，赵｝

令

$$\varphi_1:\quad 甲\longmapsto 张$$
$$乙\longmapsto 李$$
$$丙\longmapsto 赵$$
$$丁\longmapsto 王.$$

易知φ_1是A到B的一个映射；

再令

$$\varphi_2:\quad 甲\longmapsto 李$$
$$乙\longmapsto 李$$
$$丙\longmapsto 张$$
$$丁\longmapsto 赵$$
$$丁\longmapsto 王$$

由于A中的丁在φ_2之下有两个象赵与王，故φ_2不是A到B的映射.

例 3 设$A=N$，$B=Z$

令 $\varphi:\ n\longmapsto n, n\in N.$

易知φ是A到B的映射.

例 4 设$A=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle|\ a\in R\right\}$，$B=R$.

$$\varphi_1:\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\longmapsto a,$$

$$\varphi_2:\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\longmapsto 0.$$

易知φ_1，φ_2都是A到B的映射.

从上面四个例子我们看到：

1）有的映射，第二个集合B的元素都用做第一个集合A的元素的象，也就是B中每一个元素，在A中都能找到一个原象．比如例1的φ_1，例2的φ_1，例4的φ_1.

2）有的映射，第二个集合B的元素没有全用做第一个集合A的元素的象，也就是B中有的元素，在A中找不到原象．比如例1的φ_2，例3的φ.

3）有的映射，第二个集合B中的元素在A中如能找到原象的话只能找到一个，换句话说，A中任何两个不同元素，其象也不同．比如例2的φ_1，例3的φ，例4的φ_1.

4）有的映射，第二个集合B中每个元素都能在A中找到原象，而且只找到一个原象．后者也可说成A中任何两个不同元素，其象也不同．比如例2的φ_1，例4的φ_1.

定义 2 设φ为A到B的映射．如果B中每个元素，通过φ在A中都有原象，则称映射φ为A到B的满射.

如例1的φ_1，例2的φ_1，及例4的φ_1都是A到B的满射.

定义 3 设φ为A到B的映射．如果A中任意两个不同的元素，在φ之下象也不同，则称映射φ为A到B的单射.

例2的φ_1，例3的φ，例4的φ_1都是单射.

定义 4 设φ为A到B的映射．如果B中每一个元素，通过φ在A中都有原象，并且A中任何不同的两个元素，在