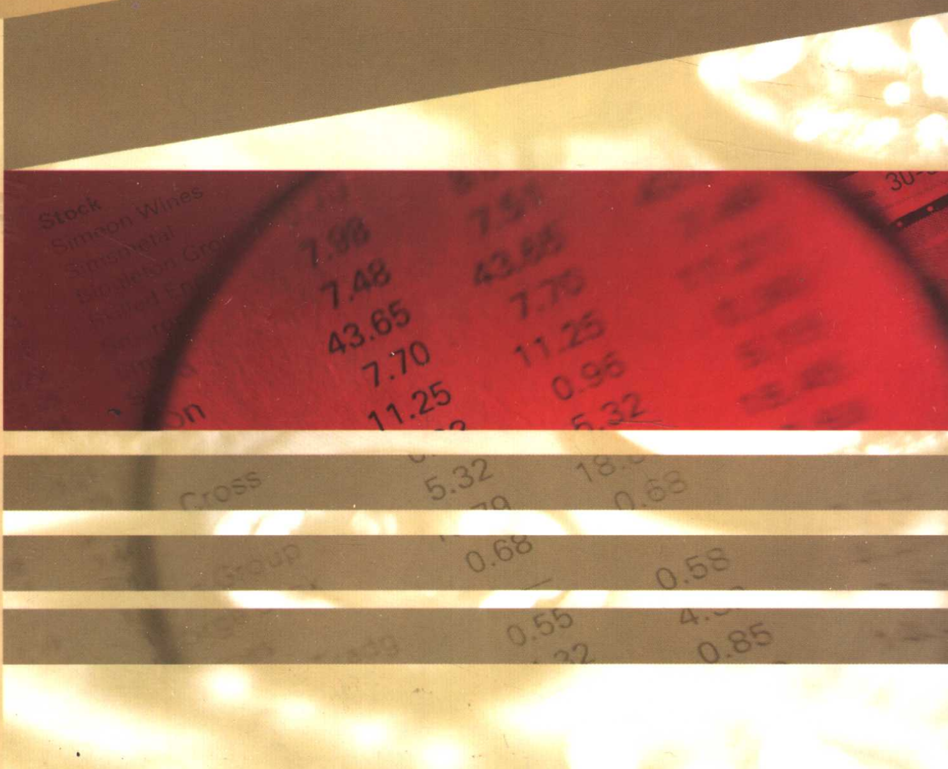
新世纪高校统计学专业系列教材

应用多元分析

（第二版）

YINGYONG DUOYUAN FENXI (DI ER BAN)

王学民　编著



上海财经大学出版社

新世纪高校统计学专业系列教材

应用多元分析

（第二版）

王学民　编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用多元分析/王学民编著．—2 版—上海：上海财经大学出版社，2004.1
(新世纪高校统计学专业系列教材)
ISBN 7-81098-020-3/O·001

Ⅰ.应…　Ⅱ.王…　Ⅲ.多元分析-高等学校-教材　Ⅳ.O212.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118604 号

□ 责任编辑　何苏湘
□ 封面设计　周卫民

YINGYONG DUOYUAN FENXI
应 用 多 元 分 析
(第二版)

王学民　编著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海译文印刷厂印刷
上海北联装订厂装订
2004 年 1 月第 2 版　2004 年 1 月第 1 次印刷

890mm×1240mm　1/32　11.5 印张　320 千字
印数 0 001—4 000　定价：22.00 元

前 言

多元统计分析是统计学中内容十分丰富、应用性极强的一个重要分支，它在自然科学、社会科学和经济学等各领域中得到了越来越广泛的应用，是一种非常重要和实用的多元数据处理方法。

本书在第一版的基础上作了重大改写，具体内容有了较大的变化，调整和充实了许多例题和习题，使之更能适应当今统计教学的需要。本教材的适用对象主要是财经类院校的统计专业本科生，本书便于自学，也可作为其他各专业读者的多元统计分析参考书。书中的绝大部分内容曾向上海财经大学统计系的本科生和研究生讲授过多届。

本教材有如下一些特点：

(1) 全书对数学基础知识的要求较低，只需读者掌握初步的微积分、线性代数和概率统计知识。尽管如此，为便于非统计专业的读者也能顺利地阅读本书，书中前几个章节对矩阵代数和一元统计知识作了简单的回顾。

(2) 本教材以简明和深入浅出的方式阐述了多元统计分析的基本概念、统计思想和数据处理方法，在充分考虑到适合财经院校学生使用的前提下进行了严谨的论述，有助于学生深刻地理解并掌握多元分析的基本思想方法。

(3) 书中提供的许多例题和习题为读者展示了多元分析在社会科学和经济学等领域中的应用，每章的例题和习题安排侧重于对基本概念的理解和知识的实际应用，并不注重解题的数学技巧和难度。

(4) 本书与 SAS 软件紧密结合，在每一章后面都附有 SAS 的应用，这有利于将 SAS 软件更好地融入各章的内容中，使读者对多元分析的意义能够有贴切的体会，便于读者进入应用的领域。

全书共分九章。第一章介绍了多元分析中常用的矩阵代数知识，这是全书的基础。第二章至第四章介绍的是一元统计推广到多元统计的内容，主要阐述了多元正态分布及其统计推断。第五章至第九章是多元统计独有的内容，这部分内容具有很强的实用性，特别是介绍了各种降维技术，将原始的多个指标化为少数几个综合指标，便于对数据进行分析。书中的一些数学证明和理论性较强的内容被安排在了各章的附录或打“*”的章节（或段落）里，非统计专业的读者可将其略过或作为选读内容。书中（需使用SAS软件运算的）所有例题、习题的数据及SAS程序均可从作者的网页：http://iclass.shufe.edu.cn/teacher-web/users/wxuemin/ 下载。

由于编者水平有限，书中错误、不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

王学民

2003年8月

目　录

第一章　矩阵代数

本章我们对书中需要用到的有关矩阵代数知识作一些简单的回顾和介绍，熟悉这些内容将为以后各章的阅读带来很大的方便。如果读者希望对这方面知识有更多、更详细的了解，可参考有关的教科书。

§1.1　定义

将 $p\times q$ 个实数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{pq}$ 排列成的一个有 p 行、q 列的矩阵列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

称为 $p\times q$ **矩阵**，常记作 $A=(a_{ij}):p\times q$，其中 a_{ij} 是第 i 行、第 j 列的元素。例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

是一个 2×3 矩阵，其中 $a_{11}=5,a_{12}=2,a_{13}=9,a_{21}=3,a_{22}=7,a_{23}=1$。

若 $q=1$，则称 A 为 p **维列向量**，记作

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

例如，带有元素 6,9 和 3 的 3 维列向量可写为

$$a=\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}$$

若 $p=1$，则称 A 为 q 维**行向量**，记作

$$a'=(a_1,a_2,\cdots,a_q)$$

例如，带有元素 2,7,3,4,3 的 5 维行向量可写为

$$a'=(2,7,3,4,3)$$

若 A 的所有元素全为零，则称 A 为**零矩阵**，记作 $A=0_{pq}$ 或 $A=0$。例如，

$$0_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若 $p=q$，则称 A 为 p 阶**方阵**，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp}$ 称为它的**对角线元素**，其他元素 $\{a_{ij},i\neq j\}$ 称为**非对角线元素**。

若方阵 A 的对角线下方的元素全为零，则称 A 为**上三角矩阵**。显然，$a_{ij}=0,i>j$。例如，

$$\begin{pmatrix}4&1&3\\0&8&9\\0&0&7\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&5&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若方阵 A 的对角线上方的元素全为零，则称 A 为**下三角矩阵**。显然，$a_{ij}=0,i<j$。

若方阵 A 的所有非对角线元素均为零，则称 A 为**对角矩阵**，简记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$。例如，

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

若 p 阶对角矩阵 A 的所有 p 个对角线元素均为 1，则称 A 为 p 阶**单位矩阵**，记作 $A=I_p$ 或 $A=I$。例如，

$$I_1=(1),\quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

若将矩阵 A 的行与列互换，则得到的矩阵称为 A 的**转置**，记作 A'，即

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

例如，若

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

则

$$A'=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

若方阵 A 满足 $A'=A$，则称 A 为**对称矩阵**。显然，$a_{ij}=a_{ji}$。例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

§1.2　矩阵的运算

若 $A=(a_{ij}):p\times q$，$B=(b_{ij}):p\times q$，则 A 与 B 的**和**定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}):p\times q$$

若 c 为一常数，则它与 A 的**积**定义为

$$cA=(ca_{ij}):p\times q$$

若 $A=(a_{ij}):p\times q$，$B=(b_{ij}):q\times r$，则 A 与 B 的**积**定义为

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right):p\times r$$

从上述定义中容易得出如下的**规律**：

(1) $(A+B)'=A'+B'$。

(2) $(AB)'=B'A'$。

(3) $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$。

(4) $A\left(\sum\limits_{i=1}^{k} B_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k} AB_i$。

(5) $c(A+B)=cA+cB$。

例 1.2.1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

则

(1) $A'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}, B'=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

(2) $A+B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 6 & 2 & 9\end{pmatrix}$;

(3) $(A+B)'=A'+B'=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$;

(4) $CA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 7\\ 11 & 11 & 19\end{pmatrix}$。

注意:AC 是没有定义的。

若方阵 A 满足 $AA'=I$,则称 A 为**正交矩阵**。显然,$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}^2=1$, $i=1,2,\cdots,p$,称 A 的 p 个行向量为**单位向量**;$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}a_{kj}=0$, $i\neq k$,称 A 的 p 个行向量**相互正交**。又从 $A'A=I$ 得:$\sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij}^2=1$,$\sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij}a_{ik}=0$ $(j\neq k)$,即 A 的 p 个列向量也是一组正交单位向量。例如,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & \frac{-1}{\sqrt{2\cdot 1}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 2}}\end{bmatrix}$$

若方阵 A 满足 $A^2=A$，则称 A 为**幂等矩阵**。例如，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

对称的幂等矩阵称为**投影矩阵**。

矩阵的分块是在处理阶数较高的矩阵时常用的方法。有时，我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，就像矩阵是由数组成的一样。设 $A=(a_{ij}):p\times q$，将它分成四块，表示成

$$A=\left[\begin{array}{c:c}A_{11} & A_{12}\\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$$

其中 $A_{11}:k\times l, A_{12}:k\times(q-l), A_{21}:(p-k)\times l, A_{22}:(p-k)\times(q-l)$。例如，若

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad A_{21}=(5,4),\quad A_{22}=(6)$$

则

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ \hdashline 5 & 4 & 6\end{array}\right]$$

若 A 和 B 有相同的分块，则

$$A+B=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12}\\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{bmatrix}$$

若 C 为 $q\times r$ 矩阵，分成

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{11}: l\times m, C_{12}: l\times(r-m), C_{21}:(q-l)\times m, C_{22}:(q-l)\times(r-m)$，则有

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}C_{11}+A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12}+A_{12}C_{22} \\ A_{21}C_{11}+A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12}+A_{22}C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 1.2.2 用矩阵分块方法证明正交矩阵 $A: p\times p$ 的 p 个列向量 p 个行向量都是一组正交单位向量。

证明 将矩阵 A 分别按列向量和行向量分块，并记

$$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_{(1)} \\ \boldsymbol{a}'_{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{(p)} \end{pmatrix}$$

由 $A'A=I$，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_p \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p)=I$$

于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_p \\ \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

故有

$$\boldsymbol{a}'_i\boldsymbol{a}_j=\begin{cases} 1, & \text{若 } i=j \\ 0, & \text{若 } 1\leqslant i\neq j\leqslant p \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p$ 为一组正交单位向量。同理，由 $AA'=I$ 可证 $\boldsymbol{a}_{(1)}$，$\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(p)}$ 也是一组正交单位向量。

§1.3　行列式

p 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的**行列式**定义为

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_p}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_p)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p} \tag{1.3.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_p}$ 表示对 $1,2,\cdots,p$ 的所有排列求和，$\tau(j_1j_2\cdots j_p)$ 是排列 j_1，$j_2,\cdots,j_p$ 中逆序的总数，称它为这个排列的**逆序数**，一个逆序是指在一个排列中一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数。例如，$\tau(3,1,4,2)=1+\tau(1,3,4,2)=3+\tau(1,2,3,4)=3$。

例 1.3.1

(1) $\begin{vmatrix}3&1\\2&6\end{vmatrix}=3\times6-2\times1=16$；

(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$

是一个四阶行列式，在展开式中应该有 $4!=24$ 项，但不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项，而 $\tau(4321)=6$，所以，该行列式为 $(-1)^6\times1\times2\times3\times4=24$。

由行列式的定义可以得到如下的一些**基本性质**：

(1) 若 A 的某行(或列)为零，则 $|A|=0$。

(2) $|A'|=|A|$。

(3) 若将 A 的某一行(或列)乘以常数 c，则所得矩阵的行列式为 $c|A|$。

(4) 若 A 是一个 p 阶方阵，c 为一常数，则 $|cA|=c^p|A|$。

(5) 若互换 A 的任意两行(或列)，则行列式符号改变。

(6) 若 A 的某两行(或列)相同,则行列式为零。

(7) 若将 A 的某一行(或列)的倍数加到另一行(或列),则所得行列式不变。

(8) 若 A 的某一行(或列)是其他一些行(或列)的线性组合,则行列式为零。

(9) 若 A 为上三角矩阵或下三角矩阵或对角矩阵,则 $|A| = \prod_{i=1}^{p} a_{ii}$。

(10) 若 A 和 B 均为 p 阶方阵,则 $|AB|=|A||B|$。

例 1.3.2 设 A 和 B 均为 p 阶方阵,则 AB 和 BA 有相同的行列式。

(11) $|AA'|\geqslant 0$。

证明 由本章§1.7 中的性质(5)和(4)即可证得。

(12) 若 A 与 B 都是方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \tag{1.3.2}$$

证明 设 $A=(a_{ij}):p\times p$, $B=(b_{kl}):q\times q$,则由行列式的定义(1.3.1)式可得

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} &= \sum_{\substack{j_1\cdots j_p \\ l_1\cdots l_q}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p(p+l_1)\cdots(p+l_q))} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\
&= \sum_{\substack{j_1\cdots j_p \\ l_1\cdots l_q}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} \cdot (-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\
&= \sum_{j_1\cdots j_p} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} \\
&\quad \cdot \sum_{l_1\cdots l_q} (-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\
&= |A||B|
\end{aligned}$$

(13) 若 $A:p\times q$, $B:q\times p$,则

$$|I_p+AB| = |I_q+BA| \tag{1.3.3}$$