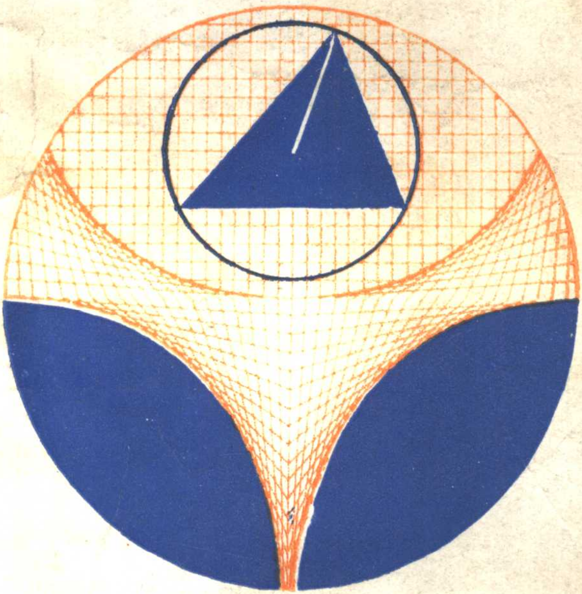
中学生解题能力培养丛书

初中数学

《丛书》编写组 编



北京师范大学出版社

中学生解题能力培养丛书

初　中　数　学

《丛书》编写组　编

北京师范大学出版社

（京）新登字160号

中学生解题能力培养丛书
初　中　数　学
《丛书》编写组　编

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7.5　字数：157千
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—10 000

ISBN　7-303-01978-2/G·1271
定价：3.60元

出版说明

高超的解题能力，娴熟的解题的技巧，是提高应试水平，取得最佳学习成绩的重要手段。训练和提高学生这方面的能力，应该是各科教学的一个重要内容；同样，有意识地培养和提高这种能力，也应该是学生学习过程中努力追求的一个重要目标。

毋庸讳言，当前不少学生在解题能力这个重要问题上，还亟待改进和提高。例如：

在应变能力方面，只会死记硬背，缺乏灵活性，稍有变化，就不知所措。

在分析综合能力方面，对单个问题还能应付，但把几个问题串起来分析，就束手无策了。解题时，或哗哗一片，条理不清；或丢三拉四，答案不全，或颠三倒四，不知所云；或离题跑题分，答非所问。

在举一反三能力方面，只顾埋头做题，不大注意如何跳出题海，总结出带有规律性的东西来，举一反三，以致事倍功半。

在优化能力方面，解题时，不分主次，没有重点；解题方法单一，不善于寻求最优方案，走捷径，结果费时又费力。

为了培养和提高中学生的解题能力，我们特约请北京市教研部门的教研员主编了这套丛书，共15个分册：高中部分包括语文、数字、英语、物理、化学、生物、地理、历史、

政治9个分册；初中部分包括数学、语文、英语、物理、化学、政治6个分册。

从书的内容结构是：运用例题，按课（或单元）分析各学科常规题型的特点、功能，传授解题技巧，指出解题中的常见失误及纠正方法等，并进行解题示范。

在编写过程中，注重做到以下两点：

（一）突出重点。对各类题型不平均使用笔墨，重点放在占分较多或难度较大、容易失误的不定项选择，论述、材料分析、计算和证明等题型上；并以解题示范为重点，着重解题思路，解题技巧的指导。

（二）增强实用性，所用例题分别选自高考、各地中考及平时教与学中具有代表性和有价值的典型试题；每种题型后均附有适当的练习题，每本书中还设计了综合练习题（模拟题），所有习题均有参考答案或解题方法提示。

本分册为丛书之一。

培养解题能力，是个常讲常新的问题，广大教师在探索过程中，取得了许多宝贵经验，我们谨以此书粗作归纳，以示我们的奉献之诚。我们愿与广大教师一起，再接再励，在这块园地里辛勤耕耘。热忱欢迎老师和同学们对丛书批评指正。

1992年10月

目　　录

多年来高中入学考试虽然是由各省、市自行命题，但它的重要性越来越被广大的教师、学生及家长所重视，特别是在小学入学取消升学考试后，它的重要性会更加突出。近年来，各省、市数学中考试题不但从题型上已逐步趋于一致，可分选择题、填空题，解答题（计算题、证明题、综合题……）等。且在命题思想、原则及考查目标上也逐步一致，在考查知识的同时，逐步增强要考查能力。因此通过对各种类型题的特点及解答方法的分析，提高学生的解题能力就显得十分必要。本书在这方面进行了这方面的探索，希望对各地教师、学生有所帮助。

一 填 空 题

§1.1 题型特点、考查目的

在数学题型里，填空题是一种常见的、重要的题型。填空题一般给出一个不完整的句子或式子，要求在空白处填上正确的内容，使句子完整，式子成立。

填空题可以依据所填空的多少分为单空填空题和多空填空题。例如，

1. 已知 $(m-1)^0=1$，那么m $\underline{\neq 1\qquad}$。

2. 如图 1-1，已知$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，那么 $\dfrac{AD}{AB}=$ ______ $=$ ______。

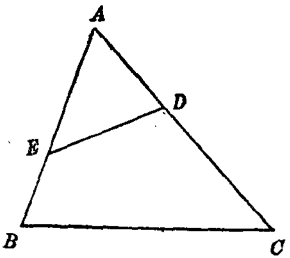


图 1-1

3. 已知直线 $y=kx+2$ 经过点$P(5, 4)$，那么 $k=$ ______，直线与 x 轴的交点坐标为______。

它们都是填空题，其中第 1 题是单空填空题，第 2 题、第 3 题是多空填空题。

对于多空填空题又可以根据填空内容之间的关联情况分为并列填空题和递进填空题。例如，第 2 题由已知$\triangle ABC \backsim$

$\triangle ADE$ 可以知道，在空内应填 $\frac{AE}{AC}$ 和 $\frac{DE}{BC}$，它们之间没有先后顺序，是并列的。象这种所填内容之间的关系是并列的多空填空题叫做并列填空题。第 3 题的第二个空要求填直线与 x 轴交点的坐标，要填这个空必须先填第一个空，在求 k 出值的基础上，才能进一步求出这条直线与 x 轴交点的坐标。象这种后面的空必须在填出前面的空的基础上，才能进一步填出的多空填空题叫做递进填空题。

填空题具有什么特点呢？

1. 解答简便，容量大

填空题一般只需要解题者填出答案或补充条件，不要求写出解题过程。因而能在规定的时间之内解较多的题目，这样所考查的基础知识和基本技能的覆盖面就容易宽，容量就容易大，

2. 针对性强，考查重点突出

填空题有时是针对记忆或理解某个数学概念容易出现模糊的地方而设计的；有时是针对记忆或应用某些数学原理容易出现错误的地方而设计的；有时是针对在解题过程中，如何应用数学思想和方法而设计的；等等。题目的针对性强。

用填空题进行考查，可以只考查其中的某些局部，做到重点突出。例如：

用换元法解方程 $3x^2-2x+4\sqrt{3x^2-2x+5}+1=0$，可设 $y=$ __$3x^2-2x+5$__，从而把原方程化为 __$y^2+4y-4=0$__

它突出考查了用换元法解无理方程的两个重点步骤：选元和变量代换。

3．有利于培养数学能力

前面已经提到，填空题一般只需要解题者填出答案或补充条件，不要求写出解题过程。这样的解题要求一方面提倡尽可能把解题过程合理地简化，迅速填出所要求的内容；另一方面提倡努力寻求最简便的解题方法，即使是非常规的方法都可以。经常性的、有目的的组织进行解填空题的训练，有利于培养数学能力。

4．容易做到公正合理地评分

填空题一般要求书写的内容不多，解答的各种情况相应也比较少，错误的类型相应也比较少，比较容易掌握评分标准，做到公正合理地评分，阅卷也比较方便。

填空题也有明显的缺陷，它只要求解题者填出指定的内容，因此，对于解题过程是否合理，解题思路是否流畅、简捷，数学语言表达能力的强弱等方面的内容，通过答填空题是很难考查的，甚至解题过程有错误都考察不到。

下面我们结合例题，研究一下填空题的考查目的。

例 1　填空：

（1）　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是______；

（2）　两条对角线______的四边形是矩形。

分析：如果准确记住二次函数顶点坐标公式和矩形的判定定理，这两个题都能很容易地答出来；二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$；两条对角线互相平分且相等的四边形是矩形。

例 2　填空：

（1）　求值：$\sqrt{4}=$______；

（2） 化简下式：$\sqrt{(\cos\alpha-1)^2}=$ __1－cosα__，

（3） 化简：$\sqrt{-a^3}=$ __$-a\sqrt{-a}$__。

分析：（1） $\sqrt{4}$表示4的算术平方根，求$\sqrt{4}$的值，就是求4的平方根±2中正的平方根，所以应填2。

（2） 因为$-1<\cos\alpha<1$，即$\cos\alpha-1<0$，所以$(\cos\alpha-1)^2$的算术平方根应是$1-\cos\alpha$。

（3） 非负数的非负平方根叫做算术平方根，因此，$-a^3$是非负数，所以$a\leqslant0$。化简$\sqrt{-a^3}$的过程应是$\sqrt{-a^3}=\sqrt{a^2\cdot(-a)}=-a\sqrt{-a}$。

例3 填空：

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\underline{\qquad\qquad}=1.$$

分析：如果这道题先根据负整数指数概念计算$\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}$的值等于4，再用1除以4求出应填$\dfrac{1}{4}$，就会花费较长的时间，并且计算量大。如果能灵活地运用零指数概念，这道题就可以这样解，所填的数与$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$的积等于1，而非零数的零次幂等于1，因此所填的数的底数也应是$-\dfrac{1}{2}$，而指数是-2的相反数，即$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$这样计算要快得多了，并且计算量小，容易算正确。

例 1 考查二次函数顶点坐标和矩形判定定理是否记得准确。例 2 的三个小题都是围绕算术平方根进行考查的，但是程度有很大区别，第 (1) 题只要初步理解算术平方根的概念就可以正确填出；第 (2) 题只有比较深刻地理解算术平方根的概念才能正确填出；而第 (3) 题只有深刻理解算术平方根的概念才能解出。例 3 则是在解题的速度和准确程度上，反映出对知识应用的灵活与否。

从例 1 、例 2 、例 3 可以看出，填空题主要考查对数学概念、数学原理（包括公式、法则、性质、公理、定理等）记忆的准确程度，理解的深刻程度和运用的灵活程度。

§1.2 解题方法、常见失误

1. 解题方法

我们知道，数学题的解题过程一般包括四步：

(1) 审题：正确地理解题意，分清题目的条件和所要达到的目标；

(2) 探求解题方法：寻求已知与解题目标之间的联系，设法建立一个由题目的条件出发到达解题目标的步骤序列，而每一个步骤是数学概念和数学原理运用于问题的条件或条件推论的推理；

(3) 给出题解：按照题目要求，决定书写格式，恰当地写出题解；

(4) 检验题解：检查解题过程是否正确。这一步不是必需的步骤，但对于提高解题的准确性，提高解题的能力是十分有益的。

数学填空题作为一种数学题型，它也遵循上述的解题过程。作为一种独立的数学题型，又有自己的特点。根据它的特点，掌握好解填空题的一般方法，有利于提高解填空题的水平。

解填空题的方法，大致有以下几种。

（1） 直接分析法

所谓直接分析法就是从题目所给的条件出发，通过分析、推理、计算，确定所要求填出的内容。

填空题中所要填的内容是未知的，它属于“求解题”一类，因此，直接分析法是解填空题的主要方法。

例 1 已知函数 $y=5x^{2a+3}$，当 $a=$ ____-1____ 时，它是正比例函数；当 $a=$ ____-2____ 时，它是反比例函数。

分析：题目中所给出的函数关系式 $y=5x^{2a+3}$ 的自变量的指数是含有 a 的式子。我们知道，正比例函数的函数表达式是 $y=kx(k\neq0)$，自变量的指数是一次的，显然，当 $2a+3=1$，即 $a=-1$ 时，$y=5x^{2a+3}$ 是正比例函数。类似的，当 $2a+3=-1$，即 $a=-2$ 时，$y=5x^{a+3}$ 是反比例函数。所以，第一个空应填 -1，第二个空应填 -2。容易验证，这样填空是正确的。

小结：解填空题的过程与解其他数学题一样，也是要经过审题、探求解题方法、给出题解、检验题解等四步，只是题解部分限定了所要填写的内容。

例 2 如果 $|x-3|+(4-y)^2+\sqrt{1-6z}=0$，那么实数 x、y、z 的积的值是____2____。

分析：求几个字母的积主要有两条思路，一条是由已知条件经过变换，直接求积；另一条是先分别求出各字母的

值，再求积．由已知条件容易判断，本题利用第一条思路解是不行的．

由方程的知识，我们知道，要求三个字母的值，要建立关于这三个字母的三个方程构成方程组才能求出．本题只给出了一个条件，如何建立关于这三个字母的方程组呢？题目所给的条件是，绝对值、实数的平方、算术平方根这三个非负数的和等于零．显然，只有它们同时等于零时，它们的和才等于零，由此可得方程组：

$$\begin{cases} x-3=0, \\ 4-y=0, \\ 1-6z=0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

所以，x、y、z 的积的值是 2．

例 3　一个多边形，它的内角和等于外角和的三倍，这个多边形的边数是________．

分析：多边形的内角和是随多边形边数变化而变化的，而多边形的外角和却与边数无关，任何多边形的外角和都是 $360°$．由题目给出的内角和与外角和的倍数关系．容易得出这个多边形的内角和为 $1080°$．再由多边形内角和定理可以计算出这个多边形的边数为 8．

例 4　已知 α、β 是方程 $x^2-\sqrt{3}x-2=0$ 的两个根，那么 $\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha\beta}$ 的值等于________．

分析：这道填空题实际上是一道求代数式的值的题目．由于题目中没有直接给出 α、β 的值，因此，这道题的解题

思路有两条，一条是由条件出发求出α、β的值，再代入求出代数式的值；另一条是根据一元二次方程根与系数之间的关系，求出 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha\beta$ 的值，再把$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha\beta}$进行变换，用 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 表示，最后代入求值.

对于这道题来说，这两条解题思路都是可行的，那么哪条思路更简便一些呢？由一元二次方程的系数容易判断出，它的根是无理数，代入求值时，计算量比较大，且容易出错. 因此，我们选择第二条思路来解.

根据一元二次方程根与系数之间的关系容易求出

$$\alpha+\beta=\sqrt{3}，\alpha\cdot\beta=-2.$$

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha\beta}=\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\right)^{\alpha\beta}$$

$$=\left[\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\right]^{\alpha\beta}. \qquad ①$$

把$\alpha+\beta=\sqrt{3}$，$\alpha\beta=-2$代入①式，得

$$\left[\frac{(\sqrt{3})^2-2\times(-2)}{(-2)^2}\right]^{-2}$$

$$=\left(\frac{3+4}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{16}{49}.$$

所以应填$\frac{16}{49}$.

小结：由例 2 和例 4 可以看出，一方面要注意总结一些类型题目的一般解题思路，使自己遇到这些类型的题目时，探求解题方法有章可循；另一方面要善于根据题目的具体情

况判断那些思路可行，那些思路不可行；那些思路比较简便，那些思路比较繁琐，确定解题的具体思路。这两个方面对于提高解题能力都是十分重要的。

例 5 如图1-2，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，$DE \parallel BC$且切$\odot O$于F。在图中找出与$\angle CFE$相等的角：

$\angle CFE =$ $\angle FBC$ $=$ $\angle FAC$ $=$ $\angle BCF$ $=$ $\angle BFD$ $=$ $\angle BAF$。

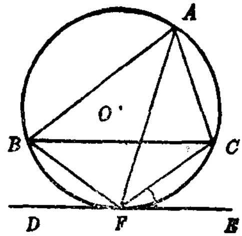


图 1-2

分析：题目中留出五个空，要求我们在图中找出五个角与$\angle CFE$相等。

我们知道，在圆这部分知识中，涉及角相等的定理较多，为了加强目的性，要注意密切联系题目中的条件和解题目标。

由于要找与$\angle CFE$相等的角，我们先分析$\angle CFE$的位置特征。由条件可知，DE切$\odot O$于F，并且CF是$\odot O$的弦，所以$\angle CFE$是夹$\overset{\frown}{CF}$的弦切角。

这样就可以借助于$\overset{\frown}{CF}$，找与$\angle CFE$相等的角。在图1-2中，$\angle CAF$与$\angle CBF$都是$\overset{\frown}{CF}$上的圆周角，它们都与$\angle CFE$相等。

再结合条件来找与$\angle CFE$相等的角。题目告诉我们，$DE \parallel BC$，容易推出，$\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BF}$，这样又可以借助于$\overset{\frown}{BF}$找出与$\angle CFE$相等的角。它们分别是$\angle BAF$，$\angle BCF$、$\angle BFD$。

说明： 本题也可以由$BC \parallel DE$推出$\angle CFE = \angle BCF$，又由于$\angle BAF = \angle BFD = \angle BCF$找出这五个角。