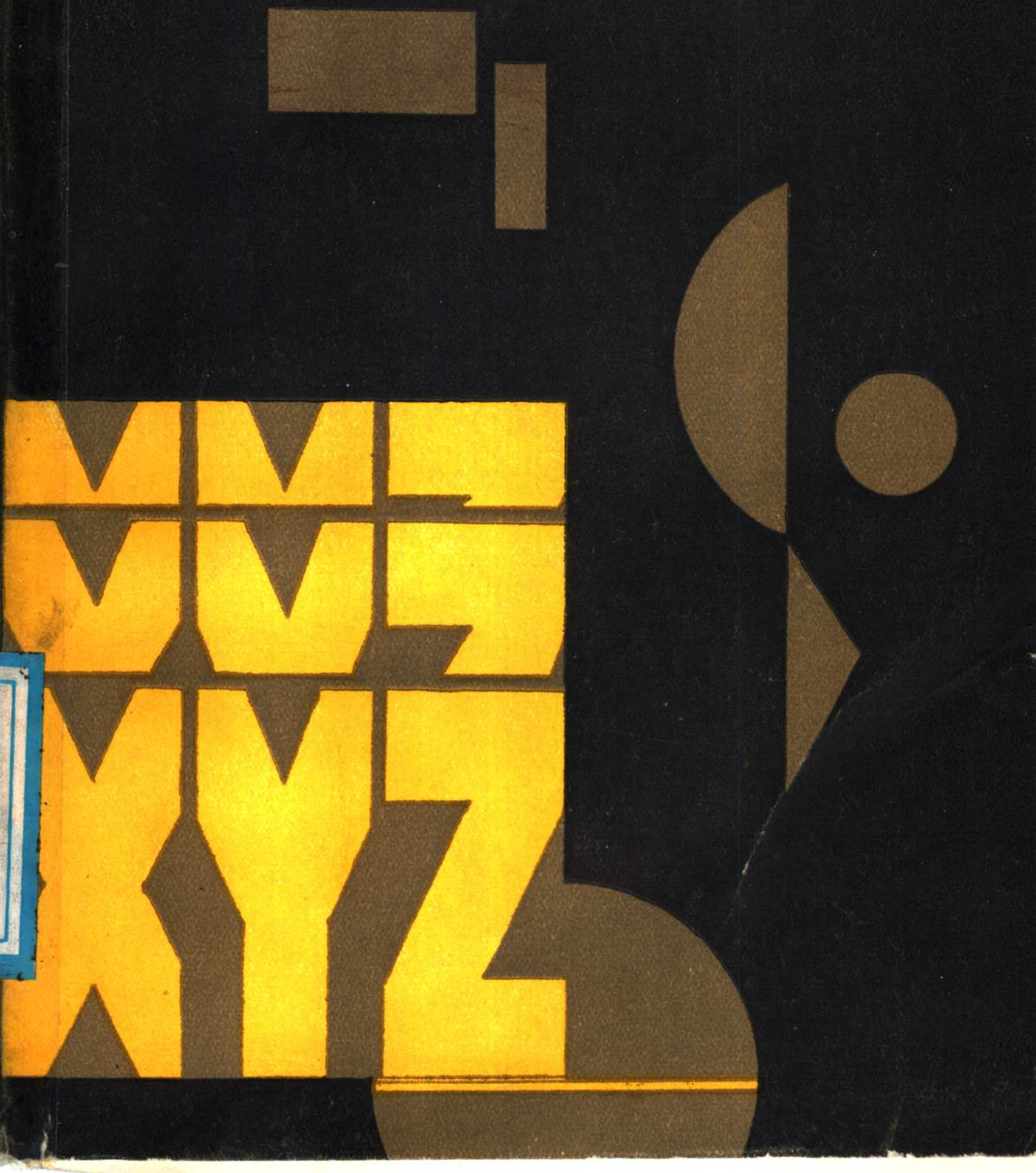
怎样灵活解数学题



怎样灵活解数学题

翟连林　汪祖亨　张载羽　卢承箴

内蒙古人民出版社

1987年·呼和浩特

怎 样 灵 活 解 数 学 题

ZENYANG LINGHUO JIE SHUXUETI

翟连林　汪祖亨　张载羽　编

*

内蒙古人民出版社出版发行
(呼和浩特市新城西街82号)
内蒙古新华书店经销　内蒙古新华印刷厂印刷
开本:787×1092 1/32 印张:15.375 字数:300千
1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷
统一书号:7089·475　印数:1—11,120册
ISBN -7-204-00050-1/G·3　每册:3.20元

前　言

数学教学的目的之一是培养学生具有分析问题与解决问题的能力，也就是培养学生具有能够独立思考并进行创造性活动的能力。近年来，随着科学技术的飞速发展和国外信息交流的日益密切，向中学数学教学不断提出新的要求和挑战，大量新颖的综合型、一题多解型的数学问题不断涌现，这就要求学生在掌握数学知识基础上进一步具有更强的探索分析和灵活解题的能力。

关于数学解题方法，虽已出版过大量的著作和习题集，但这些著作大多只介绍了个别类型数学问题的具体解法，较少探讨思维规律，为此我们针对国内中学数学教学实际，参阅国内外有关一般的数学方法论的著述（如美国数学家波利亚的名著《怎样解题》，等等），编写了本书，在介绍各种数学解题方法的同时强调了“如何思维”，本书中特别提出了在数学解题中如何巧妙运用参数或灵活进行变换的策略。对问题引入参数或进行转化的探索思想是一种高级的辩证的科学思想，它符合物质运动的哲学本性，向学生介绍这种变换的观点和策略，对掌握现代科学的思维方法与手段，无疑是一种很好的锻炼。

本书对典型例题介绍都有较详细的思路分析或解法评价，所附习题训练都具有数学方法论上的针对性，旨在帮助

读者掌握灵活解题的思路、方法和技巧，从而提高独立分析、解决问题进而创造性思维的能力，书后所附较详细的习题解答或提示，供练习后参阅。

限于水平，疏漏错误之处请读者批评指正。

编者

目 录

第一章　数学解题思维方法概述

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的一门科学，它是科学研究、工农业生产和国防建设所必不可少的基础工具。而数学题是数学知识宝库的主要组成部分，解题在中学数学学习中一直具有最重要的地位。在解题过程中所包含的大量有用的典型的智力活动，对我们深刻理解数学概念，牢固掌握定理、法则、公式和性质等数学规律，提高运算能力、空间想象能力、抽象概念能力和逻辑思维能力，认识和巩固一些常用的方法技巧，都起着决定性的影响。另一方面，解题能力的高低又是衡量一个学生的数学素质和分析问题，解决问题能力的重要标志，各类考试多采用解答试题形式就是一个明证，无怪乎美国数学家G·波利亚要郑重指出，掌握数学就是意味着善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题。本书就想顺次对灵活地解数学题的一些基本观点和某些常用策略作一介绍。

一、关于解数学题的几个问题

1.数学题与解题的实质

既然数学是一门研究数与形的科学，中学数学各章节

各分科的内容都是依从于一个概念到另一个概念，一个关系到另一个关系的推演。这就决定了解数学题也必须是通过逻辑推理或运算来沟通问题的假设条件和结论，即充分利用各已知条件并恰当地借助有关的数学知识作出正确的推演的过程，如

例1　设$p\neq0$，实系数一元二次方程$z^2-2pz+q=0$有两个虚根z_1、z_2，再设z_1、z_2在复平面内的对应点分别是Z_1、Z_2，求以Z_1、Z_2为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长。（1984年理科高考题）

思考　本题共有四个已知条件：（1）$p\neq0$；（2）实系数一元二次方程$z^2-2pz+q=0$有两个虚根z_1、z_2；(3)在复平面上的椭圆以Z_1、Z_2为焦点(Z_1、Z_2为复数z_1、z_2的对应点）；（4）这椭圆经过原点。结论则是要求出这椭圆长轴的长。条件中前二个指的是数量关系，后二个使数与形产生了联系，使本题呈现为一个数形相关的综合问题，要求解此题，我们必须充分利用各条件及与之有关的一元二次方程的判别式和韦达定理等性质、复数加减法的几何意义以及椭圆的性质来综合施展运算和推演。

解　∵p、q为实数，且$p\neq0$，z_1、z_2为虚数，故方程$z^2-2pz+q=0$的判别式$\triangle<0$，

∴　$(-2p)^2-4q<0$。

即得$q>p^2>0$，

∵实系数一元二次方程的二虚根z_1、z_2必为共轭虚数。

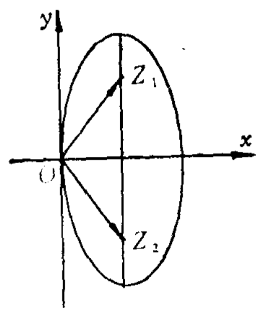


图1-1

可知z_1、z_2两点关于x轴成对称，因此椭圆的短轴必在x轴上，又已知椭圆经过原点，知椭圆的短轴一个端点即在原点。

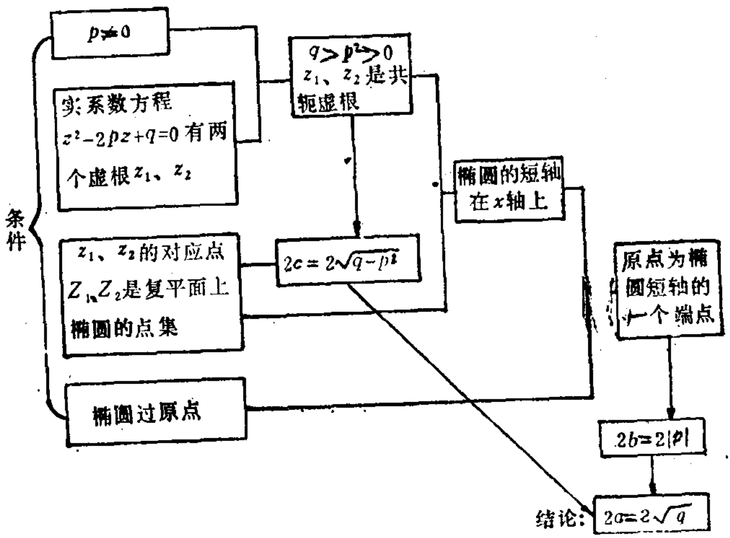
如图1-1所示，据椭圆的性质，复数运算的几何意义，及一元二次方程的韦达定理，即可得椭圆的短轴的长

$$2b=|z_1+z_2|=2|p|,$$

$$\because\quad 焦距2c=|z_1-z_2|=\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}$$
$$=2\sqrt{q-p^2}.$$

$$\therefore\quad 长轴2a=\sqrt{(2b)^2+(2c)^2}=2\sqrt{q}.$$

上面的解法由一系列的推演所组成，每一步推演都应用了题设条件并结合某些数学命题(概念、定理、公式、性质)以获得新的论据来逐步逼近答案，其过程不妨用如下的框图表示之：



框图中的各个括号或箭头，表示各条件之间或条件与其

它数学定理、性质之间的结合性推演，显然共经过六次推演才获得了求解的目标。

由此可知，解数学题的实质，是将有关的数学命题（定义、定理、公式、性质等）与求解问题的条件或条件的直接推论联系起来进行一步步推理和演算直到求出结论的过程。

认清了解数学题的实质以后，我们就可进一步来探讨解题的步骤和一些常用策略了。

2.解题的步骤

解答一般的数学问题，须历经理解题意，拟定解题计划，实现解题计划和讨论回顾所得的解等四个步骤。遵循这一程序，可以减少盲目性，预防因审题不周、漫无计划、草率从事、方法不当和讨论不全等所带来的弊病。

为搞清解题的四个主要步骤，我们不妨沿着G·波利亚从教育学角度和剖析解题过程的心理活动所作出的一张“怎样解题”表先作一番流览。

“怎样解题”表

弄清问题

<table>
<tr>
<td>第一、你必须弄清问题。</td>
<td>（1）未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？
（2）画张图，引入适当的符号。
（3）把条件的各个部份分开，你能否把它们写下来？</td>
</tr>
</table>

拟定计划

第二、找出已知数与未知数之间的联系。

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。你应该最终得出一个求解的计划。

（1）你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

（2）你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

（3）看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

（4）这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

（5）你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

（6）回到定义去。

（7）如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部份而舍去其余部份，这样对未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使

新未知数和新数据彼此更接近？

（8）你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第三、实行你的计划	**实现计划** （1）实现你的求解计划，检验每一步骤。 （2）你能否清楚看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？
第四、验算所得到的解。	**回　顾** （1）你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？ （2）你能不能把这结果或方法用于其它的问题？

我们试按解题表的程序来认识下题的解答过程。

例2　在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别是a、b、c，且$c=10$，$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，$P$为$\triangle ABC$内切圆上的动点。求点$P$到顶点$A$、$B$、$C$的距离的平方和的最大值与最小值。（1984年理工科高考题）

（1）理解题意

本题的条件是①$c=10$；②$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$；③$P$是三角形$ABC$内切圆上的动点，（显然，条件②实质上包含二个等式）所求的结论是要求出P点到A、B、C三顶点的距离

的平方和的最值。

综观之，这是一道关于图形的最值问题。

（2）拟定计划

设想以前未曾遇到过这个问题，但曾见过也解过与它密切相关的两类问题：

第一，已知三角形中某些边角之间的数量关系，要求判断这三角形的形状或解出它。

第二，在一确定的三角形中的某曲线上有一动点，求这点到三角形三顶点或三边的距离的和或平方和的最值。

于是原问题可分裂为两个较为简单的问题：

① a、b、c为$\triangle ABC$的三边，且$c=10$，

$\dfrac{\cos A}{\cos C}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，试确定$\triangle ABC$的形状及其大小。

② 在确定的$\triangle ABC$的内切圆上有一动点P，试求$PA^2+PB^2+PC^2$的最大值和最小值。

对第（1）小题，$\triangle ABC$已具备了三个条件式，这类问题据以前的经验，只要对数式进行适当的推算，三角形不难解出来，对第②小题，在确定了三角形的形状大小以后，因涉及内切圆上一个动点，拟引入直角坐标系，即能利用解析法列出目标函数，其最值也可用一般的代数三角方法顺利求出。至此，一个比较完整的解题计划可说是已经拟定了。

（3）实现计划

解法一 由$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$，用正弦定理作代换，得

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

即　$\sin A\cos A=\sin B\cos B$　或　$\sin 2A=\sin 2B$。

$\because$　$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{4}{3}$，知$A\neq B$，且$A$、$B$是三角形的内角。

$\therefore$　$2A=\pi-2B$，即$A+B=\dfrac{\pi}{2}$。

$\therefore$　$\triangle ABC$是直角三角形。

再由$c=10$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，及$a^2+b^2=c^2$，

可解得　$a=6$，$b=8$。

如图1-2建立坐标系，使Rt$\triangle ABC$的三个顶点为$A(8,0)$、$B(0,6)$、$C(0,0)$。

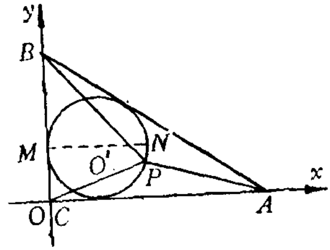


图1-2

因在Rt$\triangle ABC$中，有$a+b=c+2r$，所以内切圆半径

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{6+8-10}{2}=2。$$

$\therefore$ 内切圆的圆心为$O'(2,2)$，方程为$(x-2)^2+(z-2)^2==4$。设圆上的任一点为$P(x,y)$，则有

$$\begin{aligned}S&=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=(x-8)^2+y^2+x^2+(y-6)^2+x^2+y^2\\&=3x^2+3y^2-16x-12y+100\\&=3[(x-2)^2+(y-2)^2]-4x+76\\&=3\cdot 4-4x+76=88-4x。\end{aligned}$$

因P是内切圆上的点，故$0\leqslant x\leqslant 4$，于是

当$x=0$时，有$S_{最大值}=88-0=88$，

当$x=4$时，有$S_{最小值}=88-16=72$。

（4）回顾讨论

对上面解题过程的运算检验无误后可考虑：

$x=0$时，P点运动到BC边上的切点M，此时得所求平方和最大值为88，当$x=4$时，P点运动到过M的直径的另一端点N，此时得所求平方和最小值为72。

此外，能否用别的方法来导出结果呢？

对第①小题也可一开始用余弦定理作代换，对第②小题除选择不同的位置建立坐标系外，圆上的动点P也可以利用参数式表示，于是有

解法二 由$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，用余弦定理作代换，有

$$\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}=\frac{b}{a},$$

整理得 $a^4-b^4=c^2(a^2-b^2)$。

$\because$ $a\neq b$，由上便可得$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形。

同前解得$c=10$，$b=8$，$a=6$后，仍建立坐标系如原图，因内切圆方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=4$，可设圆上的动点为$P(2+2\cos\theta,2+2\sin\theta)$，则有

$$\begin{aligned}S&=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=(2\cos\theta-6)^2+(2+2\sin\theta)^2+(2+2\cos\theta)^2+\\&+(2\sin\theta-4)^2+(2+2\cos\theta)^2+(2+2\sin\theta)^2\\&=80-8\cos\theta.\end{aligned}$$

$\because$ $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，

故知 $S_{最大值}=80+8\cdot1=88$。

$S_{最小值}=80+8\cdot(-1)=72$。

评注　如果本题前半部分不用正弦、余弦定理作代换，后半部分不使用解析法，虽仍能设法确定三角形并推导出目标函数，但解题过程的繁复程度会明显上升。其次，通过讨论，我们还可认识到图形中的最值常在动点位于某些特殊位置时产生。经此回顾，我们对整个问题可说有了更明晰的了解。

3.解题过程的繁和简

解题过程犹如从一个地方到另一个地方的旅程，有的人循规蹈矩按常规行路，也有人能四处求索择路而直取捷径，其繁简程度差别往往甚大，如

例 3　已知a、b、c均为正数，求函数

$$y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}\text{ 的极小值。}$$

若纯从求代数函数极值的一般方法去施行，有

解法一　将函数$y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$移项，得

$$y-\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{(c-x)^2+b^2},$$

平方、化简、移项、再平方，得

$$(c^2-y^2)x^2+c(y^2+a^2-c^2-b^2)x+$$

$$+\frac{1}{4}(y^2+a^2-c^2-b^2)-a^2y^2=0.$$

将上式看作是关于x的二次方程，它的判别式

$$\Delta=c^2(y^2+a^2-c^2-b^2)^2-$$

$$-(c^2-y^2)\cdot[(y^2+a^2-c^2-b^2)-4a^2y^2]$$