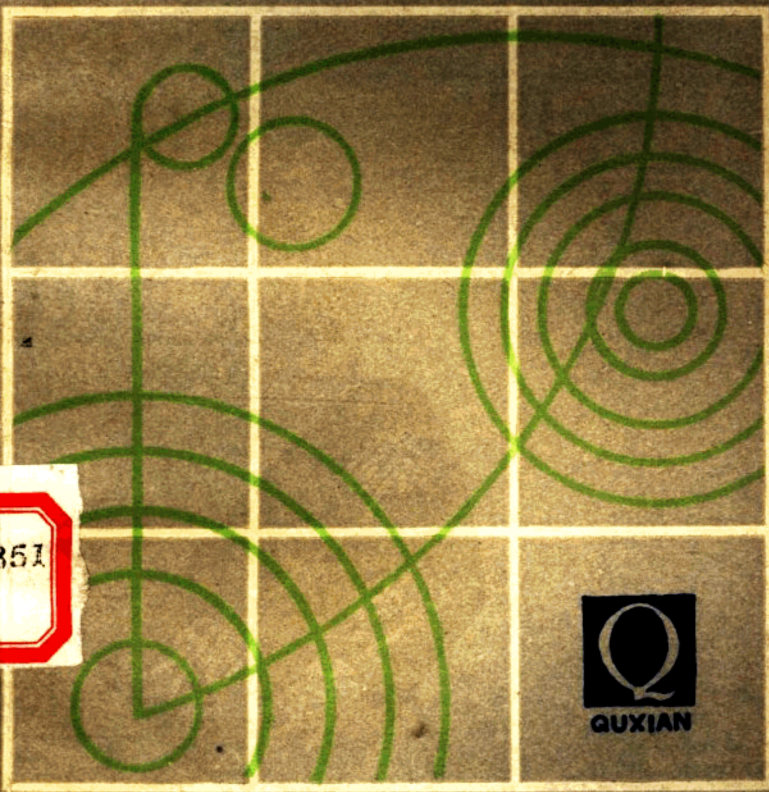
趣话曲线

[苏]Н·Б·瓦西里也夫 В·Л·库金马赫尔

张 克编译

15



趣话曲线

【苏】Н·Б·瓦西里也夫
В·П·库金马赫尔
张　克编译

福建人民出版社
一九八二年·福州

内 容 提 要

本书系莫斯科大学全苏数学函授教材；对我国中学师生来说，它是一本新颖的初等数学参考书，它从集合的概念出发，运用运动合成的方法，阐述了直线和曲线的有关性质和理论；并介绍了它们在数学、物理学等方面的运用。

本书讨论问题的观点和方法别具一格，颇有启发性，同时又通俗易懂，趣味盎然。书中配置了典型的例题和丰富的习题，并附有部分习题解答或提示。

趣 话 曲 线

中学生数、理、化课外读物

张　克编译

●

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福州五中印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　4.625印张　101千字

1983年7月第1版

1983年7月第1次印刷

印数：1—5,800

书号：7173·562　定价：0.40元

译者的话

本书是苏联莫斯科大学全苏数学函授教材。

本书从“点集合”的概念出发，巧妙地运用集合的运算，坐标变换，矢量，几何图形的运动与合成等方法，较详细地研究了平面上直线、三角形、圆、椭圆、双曲线和抛物线，以及美妙的K——摆线，心脏线、肾脏线、蚶线和蚌线等。它既剖析了这些曲线的实质特征，又提供了研究这类问题的灵活多样的方法，并且巧妙地将各有关的几何定理有机地揉合于通式定理（代数方程）中。书中还对耐人寻味的“干酪”、“汽艇”和“公共汽车”等问题作了深入而有趣的讨论。此外，各章末配置了一定数量的练习题，对于其中一部分难度较大的练习题，书末附有提示或题解。

作为中学生的课外读物和社会青年的自学用书，本书无疑是十分适宜的。对于中学理科教学，它肯定也有较大的参考价值。

本书译竣，承蒙苏子安同志认真校阅、修订。王平、张耀辉和王登水等同志提出宝贵意见，谨此深表谢意。

译者力图使原著翻译趋于完善，但鉴于水平有限，不能如愿。错误之处，敬请读者批评指正。

译者

1982．7

目　　录

1

从两个例子谈起

静中动的小猫

1·1　如图1·1所示，一只小猫坐在靠墙的梯子的中点。当梯子下滑时，这只小猫将沿着什么路线运动呢？

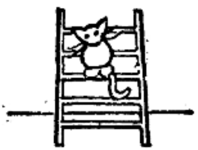


图1·1

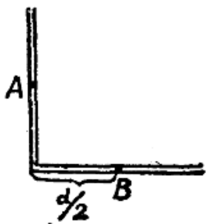


图1·2

分析　如果小猫安静地坐着，上面的问题就归结为：长为d的线段的两端点分置于如图1·2的直角边上，求线段下滑时，它的中点的集合。

当线段移动时，其端点沿着两直角边滑动，它的中点相应地会绘出怎样的曲线呢？让我们先观察其两端点的位置。当线段垂直或水平放置（相应于梯子搁置的两个极限位置）时，容易看出，这条待求曲线的端点分别位于两直角边上，且与直角顶点的距离为$\frac{d}{2}$。然后，若在图上细心地标出线段在不同位置时的中点，就可以看出，这些中点与该直角的顶点的距离都相等（如图1·3）。

由此可见，这条待求曲线是以O为圆心，$\frac{d}{2}$为半径的圆弧。

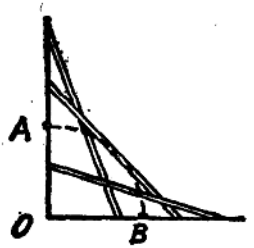


图1·3

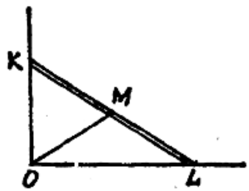


图1·4

证明 如图1·4，作一个直角三角形KOL（记作$Rt\triangle KOL$），令其斜边KL为已知线段d（$|KL|=d$）。因为斜边KL的中线OM等于斜边的一半（这点容易证明：如图1·5，由$Rt\triangle KOL$作一个矩形$KOLT$，因为矩形的两对角线KL和OT相等，且被它们的交点M所等分，故$|OM|=\frac{1}{2}|KL|$），所以，线段d在各个不同位置时，它的中点M与顶点O的距离均为$\frac{d}{2}$。那么，线段KL的中点总是位于

以O为圆心的圆弧$\widehat{AB}$上（图1·6），可见所求的集合就是圆弧$\widehat{AB}$。

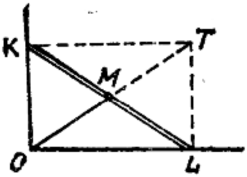


图1·5

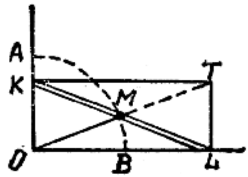


图1·6

严格地说，还要证明：圆弧$\widehat{AB}$上任意点M都是待求集合上的点。事实上，如图1·6，过圆弧$\widehat{AB}$上任意点M作一射线OM，且截取线段$|MT|=|OM|$，然后向两直角边作垂线TL和TK，得线段KL，它的中点必在M上。

【注】 后半部的证明似乎是多余的。因为很明显，移动着的线段KL的一系列中点描绘出一条以A、B为端点的"连续线"，那么M点通过整个AB弧时必过它本身的点。但是，由于数学的严密性，后段的证明是必不可少的。

从另一方面讨论1·1题中梯子的运动。如图1·7，假设线段KL（梯子）固定不动，而直线KO和LO（墙壁与地板）相应地绕着K点和L点旋转，且它们的夹角始终保持为直角。那么，从线段KL的中点到直角顶点O的距离在任意时刻均相等。这个事实符合已知定理：在平面上给定两点K和L，则使得$\angle KOL=90°$的点O的集合是以KL为直径的圆周

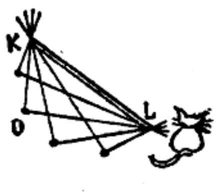


图1·7

（不包括K、L两点）。这个定理及第3章中的E项定理，常用于解题。

让我们给出较一般的已知条件，再来讨论1·1题。

1·2　如果小猫不刚好坐在梯子中点，那么它将沿着怎样的路线运动？

分析　如图1·8，先在图上画出这些线段，并在每条线段上作一点。由这些点的位置可以看出，要求的新曲线既非直线又非圆。但利用坐标方法就可以确定这条曲线，它是椭圆的一部分。

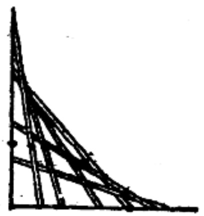


图1·8

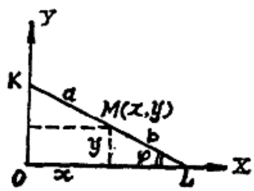


图1·9

证明　如图1·9引入笛卡儿坐标系，在其X轴和Y轴上相应地截取两直角边。设小猫坐在点M（x，y）上，它距梯子K端为a，距L端为b，且$a+b=d$。

如果线段KL与OX轴的夹角为φ，那么$x=a\cos\varphi$，$y=b\sin\varphi$，则当φ为任意值（$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$）时，$M$点所满足的坐标方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0) \quad (1\cdot 1)$$

显然，满足这个方程的点集合是椭圆，因此，小猫沿着椭圆周运动（图1·10）。

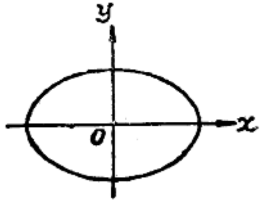


图1·10

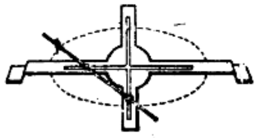


图1·11

讨论：当$a=b=\frac{d}{2}$时，小猫所处的位置与1·1题一样，方程式（1·1）变成圆方程：$x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$.由此可见，圆方程是椭圆方程的一个特例。

如图1·11所示的绘画椭圆的工具，称为勒拉托（Пеонардо）椭圆规，其工作原理正是根据上述证明的结论。

圆内圆的滚动

1·3 假设小圆的半径是大圆半径的一半，当小圆在大圆内作无滑动的滚动时，试问小圆上任意点K的运动轨迹是什么（图1·12）？

图1·12

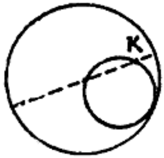


图1·13

分析 这个问题的答案很简单：K点的轨迹是一条直线

段。准确地说，K点沿着大圆的直径运动着。这个结论称为库别尼克（Коперник）定理（图1·13）。

为了验证这个定理的正确性，读者不妨亲自动手做一做实验。不过，在实验中，应当注意小圆滚动时，不能打滑，否则实验会失败。下面用圆周角定理证明库别尼克定理。

证明 如图1·14，假设初始时刻小圆上某点K与大圆的A点重合。这时两圆的切点为T，因为弧长$\widehat{KT}$和$\widehat{AT}$相等，且小圆半径为大圆半径的一半，所以$\widehat{KT}$的度数为$\widehat{AT}$度数的两倍。如果O为大圆的圆心，根据圆周角定理（参阅第2章），可知$\angle AOT = \angle KOT$，则K点位于大圆的半径AO上，当小圆沿着大圆内侧继续辗压直至大圆的$\frac{1}{4}$周处，即它们的切点如图1·15所示落在大圆的B点上时，对于大圆，$\angle BOA = 90°$，则K与O重合；如图1·16，当小圆再辗压大圆的下一个$\frac{1}{4}$周时，K点运动的轨迹简单地以直线BO成对称，直至K点到达大圆直径AA'的另一端A'点上（图1·17）；接着小圆沿着大圆的下一半圆周辗压，K点又沿$A'A$向A点运动，最终返回A点。

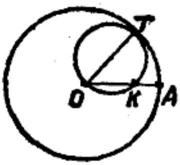


图1·14

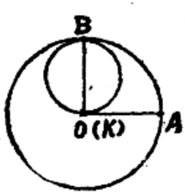


图1·15

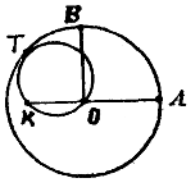


图1·16

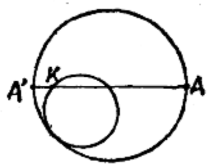


图1·17

比较上述两题（1·1题和1·3题）的结果，可以看出，这两个问题涉及的都是复杂的图形运动（前者关于线段运动，后者关于圆的运动）。但是，其中动点轨迹的获得却并不难，这两个问题不仅表面上相互联系着，而且它们涉及的运动还有本质上的一致性哩！

事实上，如图1·18半径为$\frac{d}{2}$的圆沿着半径为d的圆内侧辗压，若令小圆的直径为KL，根据库别尼克定理可知：K和L两点相应地沿着定圆的两直径运动，即K点沿AA'运动，L点沿BB'运动。这样，直径KL的端点沿着两条互相垂直的直线滑动，它就是1·1题里梯子的运动。

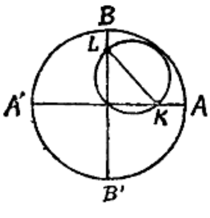


图1·18

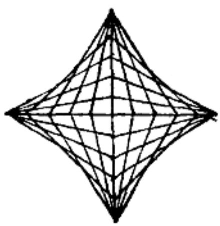


图1·19

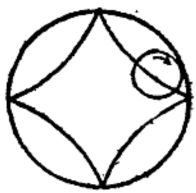


图1·20

再讨论一个与线段KL运动有关的饶有趣味的问题：当小圆运动时，线段KL的各个位置的并集是什么？如图1·19，

局限这个集合的曲线叫做星形线。这条星形线可以这样获得：如图1·20，让直径为$\frac{d}{2}$的圆沿着直径为$2d$的定圆内侧滚动，绘出动圆上某观察点的轨迹，该轨迹就是星形线。

由此可见，人们熟知的直线，圆以及其他曲线，甚至于相当复杂而精致的曲线都并非完全孤立的，它们之间存在着十分密切的有机联系——运动。

本书在探讨这些复杂曲线以前，先详细地研究直线和圆的关系，而对那些美妙而复杂的曲线的研究，放在第 6 章之后。

2

点 集 合

本章要通过列举的许多问题，来阐明本书对各种问题的基本看法，形成概念并归纳出解题方法。

先谈谈本书常常碰到的术语，也就是本章的题目——点集合。

点集合是一个含义极广的概念，且它的图象可以是任何几何图形。例如一个点或几个点，线或平面上的区域等。

本书许多习题需要求满足某一个给定条件的点集合。通常情况下，初等几何书里已知的图形，例如直线、圆，有时候它们划分的平面的一部分就是这些习题的答案。但是，在解题中人们感兴趣的是这些集合的图形，比如1·1题，其答案是圆；而1·3题的答案则是直线。

对于某些习题的解，要求完整地论证：(*a*) 满足某种条件的一切点都属于所述图形；(*b*) 该图形上任意点均满足给定条件。有时结论的两个方面——正面和反面——都是显然的，有时只有其中的一面，而考虑如何作答却会感到困

难。

选解几个典型习题：

2·1　已知线段 AC 上有一定点 O，求满足 $\angle MOC=2\angle MAC$ 的点 M 的集合。

解　如图2·1所示，在直线 AO 外任选一点 M，联结三角形 MOA，根据外角定理，三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角和，即 $\angle MOC=\angle MAC+\angle AMO$。为了满足条件：$\angle MOC=2\angle MAC$，必须要求：$\angle MAC=\angle AMO$。则 $\triangle AMO$ 必是等腰三角形，即 $|OM|=|AO|$。

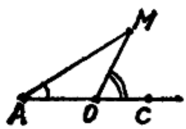


图2·1

由此可见，M 点集合是以 O 为圆心，$|AO|$ 为半径的圆（A 点除外）和射线 OC（O 点除外）的并集（图2·2）。

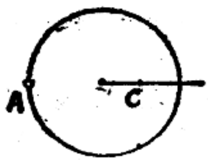


图2·2

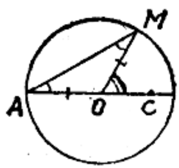


图2·3

再证明这个并集上的点都满足已知条件。我们首先证明以 O 为圆心，$|AO|$ 为半径的圆上任意点（A 点除外）都满足条件。如图2·3，因为 $|AO|=|OM|$（均为圆的半径），所以 $\angle MAO=\angle AMO$。又 $\angle MOC$ 与 $\angle MAC$ 是同弧上的圆心角和圆周角，因此 $\angle MOC=2\angle MAC$。可见圆周上任意点 M 满足给定条件；假如 M 点在射线 OC 上，且 M 点不落在 O 点上，那么 $\angle MOC=2\angle MAC=0°$，故射线 OC 上除 O 点外的

点都符合条件。但M落在线段AO的其余点上时，由于$\angle MOC$和$\angle MAC$，其中一个角展开，另一个角却是零度角，所以线段AO上其余的点都不属于待求集合。

2·2 如图2·4所示，有两个半径分别为r_1和r_2（$r_1>r_2$）的轮子沿着直线l滚动着，求它们的两条内公切线的交点M的集合。

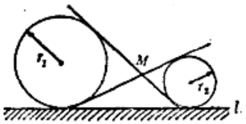


图2·4

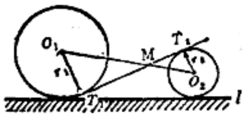


图2·5

解 图2·5，设两圆的圆心分别为O_1和O_2，M点应位于两圆的对称轴即直线O_1O_2上，因此直线O_1O_2与两切线之一的T_1T_2的交点集合，便是所求的点集合。

当两圆处于任意位置时，过两切点作它们的半径O_1T_1和O_2T_2，因为$\mathrm{Rt}\triangle MO_1T_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle MO_2T_2$，所以$M$点内分线段$O_1O_2$成定比例。显然，当两圆滚动时，圆心$O_1$和$O_2$的集合都是平行于$l$的直线，相应的$M$点分各条线段$O_1O_2$的比例均相同，那么，$M$点集合也应是平行于$l$的直线（图2·6）。

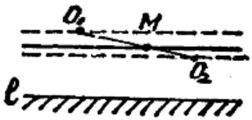


图2·6

由此可见，两切线交点集合是一条平行于直线l的直线，且与l的距离为$\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$。

解答下列问题，必须采取“化整为零”，分区论证的方法。

2·3　如图2·7，给定矩形$ABCD$，在平面上求：到直线AB和CD的距离之和等于到直线BC和AB的距离之和的点集合。

解　令a和b分别表示矩形的两条邻边长，不妨设$a<b$。

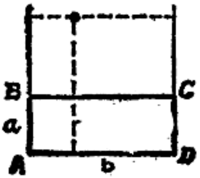


图2·7

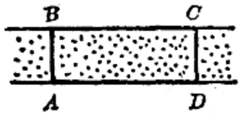


图2·8

如图2·8，在矩形内的点和在两条较长边延长线间的点都不符合题意条件，因为这些点到BC和AD的距离之和为a，而到AB和CD的距离之和大于b或等于b。

如图2·9，当M点位于两条较短边的延长线间时，以y表示它到与之较为接近的矩形较长边的距离，那么到另一长边距离为$(y+a)$。为了使点满足题意，必须符合方程式：$y+(y+a)=b$，则$y=\dfrac{b-a}{2}$。由此可知，这个区域内满足条件的只有那些到与之较为接近的矩形较长边的距离为$\dfrac{b-a}{2}$的M点集合，即如图2·10所示的两线段EF和$E'F'$。

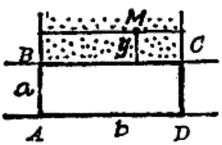


图2·9

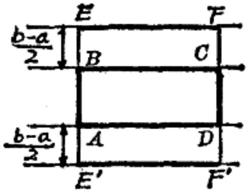


图2·10