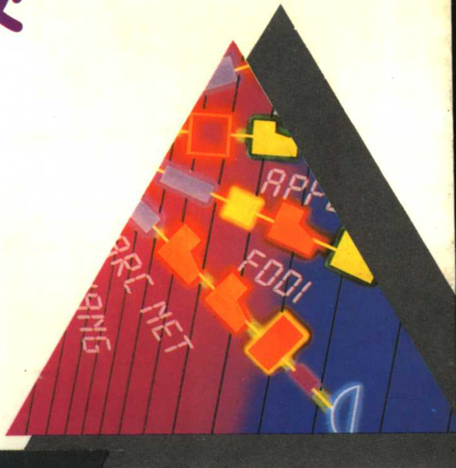
北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校数学课本



高一年级

中国人民大学附中　编

中学部

中国大百科全书出版社

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校
数学课本

（高一年级）

中国人民大学附中编
主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社
北京·1998

华罗庚学校数学课本（高一年级）

编　　者：中国人民大学附中
主　　编：刘彭芝
责任编辑：简菊玲
封面设计：郭　健
版式设计：赵　伟
责任校对：陆占林　王玉琴

出版发行：中国大百科全书出版社
（北京阜成门北大街 17 号　100037）
印　　刷：北京四季青印刷厂
经　　销：新华书店总店北京发行所

版　　次：1996 年 3 月第 2 版
印　　次：1998 年 4 月第 3 次印刷
印　　张：8.625
开　　本：787×1092　1/32
字　　数：190 千字
印　　数：20001—30000
ISBN 7—5000—5667—2/G・143
定　　价：9.80 元

前　言

北京市华罗庚学校是由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办的，是中国人民大学附中超常教育体系的重要组成部分。其办学目标是为国家大面积早期发现与培养现代杰出科技人才开辟一条切实可行的途径、为我国教育事业面向现代化、面向世界、面向未来的战略方针探索一项行之有效的举措。在这里，一大批高级教师、大学教授和研究员精心执教，一批批数理超常儿童茁壮成长。华校全体师生缅怀我国著名数学家华罗庚教授，崇尚他为国为民鞠躬尽瘁的高贵品质，决心沿着他的路继续走下去，在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族重振雄风的宏图大业甘当马前卒。

超常教育与早期教育，为当今各国教育家、心理学家所重视。超常教育研究得到了各国政府以及有远见卓识的社会各界人士的支持和赞助。他们认为，早期教育一旦在世界范围内推广成功，给世界带来的巨大影响，远比世界上任何一次科技革命和产业革命更深刻、更广泛。在前苏联，国家开办有各类天才学校，用于培养科技文体方面的超常儿童。在美国，控制论的创立者、“神童”维纳就是家庭和学校共同精心培育成功的典型。

近年来，我国众多有识之士在改革开放、建设有中国特色社会主义的宏图大业感召下，投身超常教育事业，辛勤耕

耘，刻苦研究，已经取得可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步。然而，不言而喻，超常教育又是一个异常复杂的新的教育课题。不论是历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长环境不佳，而主要则是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育的结果。因此，我们必须更新教育观念，采取新的教育理论和方法，把大批聪慧儿童培养成为高科技时代的栋梁之材。创办华罗庚学校的主旨，就在于探索一条使那些天资优异的孩子们，既不脱离群体，以免身心畸形发展，又使他们的才华得以充分开发的可行之路。

七百多年前，英国思想家、现碟实验科学的先驱罗吉尔·培根曾说："数学是科学的大门和钥匙。"时至今日，人们更加清楚地看到了数学在现代教育中占据着永恒的地位。当今世界，自然科学、社会科学和数学已发展成为三足鼎立之势，而数学更是各门科学发展的基础；科学和技术的迅猛、巨大的进步，主要就是得益于数学的现代发展，特别是数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。因此，华校在以数学为带头学科的施教前提下，同时又鼓励学生们在自己感兴趣的其他课程，如物理、化学、生物、外语、计算机等学科中开拓进取，施展才华。这样，近而言之，希望他们在运用中体验数学的思维模式和神奇魔力；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下全面的科学文化素质的坚实基础。

华校采取科学的教学方法，进行开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。除由人大附中选派经验丰富的优秀教师任教外，还聘请中国科学院、中国科技

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

大学、北京大学、清华大学、中国人民大学以及北京师范大学等高校专家、教授来校办讲座。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

华校小学部属校外培训性质，从小学三年级选拔招生。入学后每周学习一次，寒暑假进行集中培训。招生时间定于每年10月份，招生范围以北京市为主，面向全国。届时小学各年级同时进行考试。录取时每个年级的前50名编为A班。几年来，华校小学部六年级A班的学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。每年暑期，华校高中部聘请高等学校中的学科奥林匹克的高级教练来校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识，进行较强的针对性学习与训练，培养学生的独立思考、观察、分析和解决问题的能力，为他们参加区、市、全国乃至世界级的学科竞赛准备条件。

实践证明，华罗庚学校对超常儿童的培养方略是可取的。近十年来，华校为高一级学校输送了大量的学业优异的人才。以第一、二、三届试验班为例，三届毕业生总数为136人。其中，直接保送到国家第一流重点大学35人，占25.7%。参加高考的101人中，考入清华大学42人，占30.8%；北京大学41人，占30.1%；中国科技大学10人，占7%。总计考入上述三校为93人，加保送35人，总计为128人。第四届实验班又进一步：全班44人，保送9人，参加高考35人，高考平均分数为610.83分，数学平均分数为137分；总分数超过600分的有25人。不仅如此，还有数以千计的学生在区、市、国家乃至世界级的数理学科的竞赛中获奖夺魁，位居北京市重点中学之首。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实

践，使得一批又一批英才脱颖而出，足以显示华罗庚学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

更可喜的是：在探索办学的过程中，以华校为核心，造就并团结了校内外一大批具有新思想、新观念、肯吃苦、敢拼搏的优秀教师和教育专家。在这个来自平凡的教学科研岗位的不平凡的群体中，有多年工作在教学第一线的中小学高级教师，有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们就像当年的华罗庚那样，做为人师，做为长者，着眼于祖国的未来，甘愿给下一代当人梯。狭义地说，他们是华校藉以成长、引以自豪的中流砥柱；广而言之，他们是推动中小学教育事业改革的一支特别劲旅；他们的教学经验和长期积累起来的教学资料更是我国中小学生在国内外学科奥林匹克赛场上争雄夺魁的无价“法宝”。

今天，在对华校创办十余年的经验进行总结时，我们可以说，在朝着自己的办学目标的不懈奋斗中，华校具有四大办学特色：

第一，从娃娃抓起的早期智力开发；

第二，必名师启蒙的成功教育传统；

第三，在全面发展时力求业有专精；

第四，处强手如林中敢于应接挑战。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验的基础上的。因此，华罗庚学校开创了荟萃专家编书的格局，愿将《华罗庚学校奥林匹克系列丛书》奉献给广大教

师、中小学生及学生家长同享。目前已出版和即将出版的有《华罗庚学校数学试题解析》（小学部一册、中学部六册）、《华罗庚学校数学课本》（小学部六册、中学部六册）《奥林匹克中学数学讲座》、《奥林匹克小学数学讲座》、《华罗庚学校计算机教材》、《华罗庚学校图解英语》、《华罗庚学校模范作文》、《华罗庚学校物理试题》、《华罗庚学校物理教材》、《华罗庚学校化学教材》、《华罗庚学校化学试题》。这套丛书的编选者都是华校的骨干教师，他们为了共同的目标献出了自己多年的教学经验和最新的教学科研成果，因而使得这套丛书具有实用、新颖、通俗、严谨的特点。这些特点使全书别具一格，面目一新。我相信，它必将博得广大师生与家长的喜爱。

俗云："一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。"华校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。"合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。"遥望未来，我们同呼志士之言：为中国在 21 世纪成为科技强国而献身。

作为本教材的主编，我谨以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意；恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

目　录

第一讲 集合与子集

集合是数学的一个基本概念．集合论是数学的基础．在某种意义上说，数学的各个分支就是建立在各种满足特定条件的集合之上的．因此，认识集合的性质有助于加深对数学本质的理解．

在中学数学竞赛中，几乎所有的问题都可以用集合的语言来叙述．不过对许多本质上属于代数、几何、数论的问题，应该用特别的用语和方法来解决．本讲主要讨论以下两类问题：一是关于集合的元素的问题，属于集合论范畴；二是关于集合的子集的问题，主要是与子集族有关的计数、极值以及集合的分拆等问题，可认为属于组合数学．以下我们讨论这两类问题．

一、关于集合的元素

在高中课本中已引进了两个集合的交、并运算和一个集合关于全集的补运算．这里我们再引进两个新的运算符号．

定义 1：记 A、B 是两个集合，则

所有属于 A 且不属于 B 的元素构成的集称为 A 关于 B 的差集，记做 $A\backslash B$．

A 关于 B 的差集与 B 关于 A 的差集之并称为 A 和 B 的对称差，记做 $A\triangle B$．

关于差集、对称差有一系列性质，有许多可以用集合等式的形式描述．

例1　对于任意三个集 A、B、C，证明下列等式：

①$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$　　(1)

②$(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$　　(2)

③$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$　　(3)

④$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$　　(4)

解：为叙述方便，下面我们采用一些常用的记号：$\neg$表否定，$\vee$表“或”，$\wedge$表“且”，$\forall$表“任意”，$\exists$表“存在”.

①因为 $x\in(A\backslash(B\backslash C))$

$\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin(B\backslash C))$

$\Leftrightarrow(x\in A)\wedge((x\notin B)\vee(x\in C))$　　(5)

$\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\notin B))\vee((x\in A)\wedge(x\in C))$　　(6)

$\Leftrightarrow(x\in(A\backslash B))\vee(x\in(A\cap C))$

$\Leftrightarrow x\in((A\backslash B)\cup(A\cap C))$

所以　$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$

这里(5)与(6)的等价性是由逻辑公理保证的.

③$(A\triangle B)\triangle C=[(A\triangle B)\backslash C]\cup[C\backslash(A\triangle B)]$

$=\{[(A\cup B)\backslash(A\cap B)]\cap\overline{C}\}\cup\{C\backslash[(A\cup B)\backslash(A\cap B)]\}$

$=\{[(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})]\cap\overline{C}\}\cup\{C\cap[\overline{A\cup B\cap(\overline{A\cap B})}]\}$

$=\{(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}\}\cup\{C\cap(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\}$

$=[(A\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{B}\cap\overline{C})]$

$\cup[(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap A\cap B)]$

$=(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

(7)

用完全类似的推理可证 $A\triangle(B\triangle C)$也等于(7)式，从而(3)式得证.

以上对①、③的证明过程分别代表了论证集合关系式的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

两类典型方法．对于①是从定义出发，通过逻辑演算得出结论；对于③是利用各种已知的集合关系式做恒等变形，使证明更为简洁．

关于②、④的证明留作练习．值得注意的是：由①、②我们可以知道差运算是不满足结合律的．

数学的另一个重要概念是函数，函数的定义可以在集合论中给出．我们先来定义笛卡儿积和定义关系．

定义 2：两个集合 A 与 B 的笛卡儿积为

$$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\} \tag{8}$$

它是一个集合．这样坐标平面即可表示为 $R\times R$，简记为 R^2．

类似的，可以定义 n 个集合 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的笛卡儿积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\mid a_i\in A_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\} \tag{9}$$

它的一个子集称为 $A_1,\cdots,A_n$ 之间的一个 n 元关系 Rel，Rel 的元素是 n 元数组．

例如，$\mathrm{Rel}=\{(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (3,\ -1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 1)\}$是集合$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$与集合$\{-1,\ 0,\ 1\}$之间的一个二元关系．

下面我们来定义函数(映射)．

定义 3：若一个二元关系 $\mathrm{Rel}\subseteq A\times B$ 满足：对任意 $x\in A$，存在$(x,\ y)\in\mathrm{Rel}$ 且

$$(x,\ y)\in\mathrm{Rel}\wedge(x,\ z)\in\mathrm{Rel}\implies y=z \tag{10}$$

那么我们就称 Rel 是 A 到 B 上的一个函数(映射)，记作 f．对$\forall\ x\in A$，记 $f(x)=y$，其中$(x,\ y)\in\mathrm{Rel}$．并且记 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$．

若$(x_1\in A)\wedge(x_2\in A)\wedge(x_1\neq x_2)\implies f(x_1)\neq f(x_2)$，则

称 f 是一个**单射**. 一个易被忽视但确实有用的命题是:“一个从 R 到 R 上的函数 f, 若它是单射并且是连续的, 那么它是单调的”.

若 $f(A)=B$, 则称 f 是一个满射.

若一个函数既是单射又是满射, 我们称之为一个双射.

双射函数有特别重要的意义. 假设存在一个 A 到 B 上的双射 f. 若 A、B 都是有限集, 则 $|A|=|B|$($|X|$表有限集 X 的元素个数), 这是很多计数问题与组合恒等式的基础. 若 A、B 是无限集, 则表明它们的基数是相同层次的无穷.

我们来看两个例子.

例 2 设 X 是一个非空集合, A_1, A_2, …, A_m 为 X 的 m 个两两不同的集合, 证明所有形如 $A_i \triangle A_j (1\leqslant i\leqslant j\leqslant m)$ 的 X 的子集中至少有 m 个两两不同.

解: 设 C 为任意固定的集合, 考虑定义在集 $P(X)=\{A|A\subseteq X\}$ 上的函数 $f(A)=A\triangle C$.
($P(X)$称为 X 的幂集合)由

$$(A\triangle C)\triangle C=A\triangle(C\triangle C)=A\triangle\varnothing=A \qquad (11)$$

得知: 若 $A\triangle C=B\triangle C$, 则

$$A=(A\triangle C)\triangle C=(B\triangle C)\triangle C=B \qquad (12)$$

因此 f 是单射.

于是, 我们知道形如 $A_i\triangle A_1(1\leqslant i\leqslant n)$ 的 X 的 m 个子集两两不同, 证毕.

例 3 求 $A=\{x|x\in(0,1]\}$ 和 $B=\{$所有无穷自然数列$\}$ 之间的一个双射.

解: 我们将$(0, 1]$中的每一个数 x 表示成二进制小数的形式

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{2^k} \tag{13}$$

这里 t_k 为 0 或 1．简记为 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$．并且规定：对于一些可用两种不同方法表示成二进制小数的 $x\left(\text{例如}\frac{3}{8}\right)$，我们取含有无穷多个 1 的表示法，例如记

$$\frac{3}{8}=0.0101111\cdots$$

而不用 $\frac{3}{8}=0.011$．不难证明，这样一来，对(0，1]中的每一个数 x，表示方法是唯一的．

在另一方面，我们有如下对应关系：

$$\begin{aligned}&(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots)\\ \longleftrightarrow\ &(x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ \cdots)\\ \longleftrightarrow\ &0.00\cdots0\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}x_1\text{位}}}{1}00\cdots0\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}(x_1+x_2)\text{位}}}{1}0\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

此处$(x_1,x_2,\cdots)$为任一无穷自然数列，不难知道以上所做的两步变换都是一一对应的．因此，这就是 A 和 B 之间的一个双射．

关于集合的元素我们就讨论到这里，接下去我们来看一看有关集合的子集的问题．

二、关于集合的子集

在例 2 中我们已经看到了集合 X 的一个子集 A 即是 X 的幂集合 $P(X)$的元素．因此，严格地说在这里我们所要讨论的是关于子集族的一类计数、极值问题．以下记 $F=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$为集合 X 的子集族，其元素 $A_i(1\leqslant i\leqslant t)$为 X 的不同子集．

例 4　一个 n 元有限集 X 的一个 r-分解是指一个映射

$f_{:\{1,2,\cdots,r\}\to P(X)}$，使$\bigcup_{i=1}^{r} f(i)=X$且当$i\neq j$时$f(i)\cap f(j)=\varnothing$. 一个阶为$r$的$S$系是指一个$r$-分解的族$\alpha$，它具有以下性质：对于任意的$i(1\leqslant i\leqslant r)$，族$\{f(i)\mid f\in\alpha\}$里的集合是互不包含的.

证明：对于任何S系α，有

$$\max|\alpha|=\max_{\sum_{i=1}^{r} n_i=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!} \tag{15}$$

解：(15)式的右边是一个多项式系数，组合意义是将n个不同的物体放入r个不同的盒子，使第i个盒子中恰有n_i个物体的方法数. 这就启发我们得到下面的证法.

我们先建立一个映射$g_{:\alpha\to P(X^n)}$，如下：

对每一个$f\in\alpha$，记$m_i=|f(i)|(1\leqslant i\leqslant r)$，则

$$g(f)=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mid 若\sum_{k=1}^{i-1} m_k<t\leqslant\sum_{k=1}^{i} m_k,\ 则\ a_t\in f(i)\}.$$

我们有

$$|g(f)|=\prod_{k=1}^{r} m_i \tag{16}$$

下面我们证明对任意的f_1，$f_2\in\alpha$，$f_1\neq f_2$，有$g(f_1)\cap g(f_2)=\varnothing$.

证明：用反证法，若存在f_1^*，$f_2^*\in\alpha(f_1^*\neq f_2^*)$使得存在$(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in g(f_1^*)\cap g(f_2^*)$，则有$f_1^*(1)=f_2^*(1)$. 否则$f_1^*(1)\subset f_2^*(1)$与$f_1^*(1)\supset f_2^*(1)$，这两式中必有一个成立(因为它们分别含有$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$的前$|f_1^*(1)|$个和$|f_2^*(1)|$个元素). 类推可知$f_1^*(2)=f_2^*(2)$，$f_1^*(3)=f_2^*(3)$，$\cdots$，$f_1^*(r)=f_2^*(r)$. 得$f_1^*=f_2^*$，与假设矛盾.

又因为$\bigcup\limits_{f\in\alpha} g(f)\subseteq T=\{p \mid p$ 为 X 中的元素的一个排列$\}$

所以$\sum\limits_{f\in\alpha}|g(f)|\leqslant|T|=n!$

记$m=\min\limits_{\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n}\prod\limits_{i=1}^{r}n_i!$，我们有

$$n!\geqslant\sum_{f\in\alpha}|g(f)|\geqslant\sum_{f\in\alpha}m=m\cdot|\alpha| \tag{17}$$

从而

$$|\alpha|\leqslant\frac{n!}{m}=\frac{n!}{\min\limits_{\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n}\prod\limits_{i=1}^{r}n_i!}=\max_{\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots n_r!} \tag{18}$$

另一方面，由前面的分析可知，对使得$\prod\limits_{i=1}^{r}n_i!$取到最小值的数组$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$，所有满足$|f(i)|=n_i(1\leqslant i\leqslant r)$的 f 构成的族 α^* 即可达到这个最大值(α^* 是 s 系这一点是不难验证的).

于是命题得证.

对于这样的离散极值问题，解答一般都要分两个部分：一是确定一个上(下)界；二是构造一个例子取到这个极值.（有关这方面的详细内容可参见高三册第十四讲）

在本例题中，还可以进一步证明在不计 n_i 的次序的情况下，例子是唯一的.

这里还有一个值得注意的问题，那就是由于集合中元素的互异性，某个 $f(i)$ 与另一个 $f^*(i)$ 相等是允许的，因为它们是集族中的同一元素.

这个命题当 $r=2$ 时称为斯潘纳(Spener)定理. 它的另一

个表述形式为：

考虑 n 元集 X 的一个子集族 F，若 F 中任两元素互不包含，则称 F 是一个 S 族，并且 S 族的元数至多为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

我们用另一种办法来估计斯潘纳定理中 $|F|$ 的上界. 首先，我们称满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$ 的集族 $J=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 为链，称 k 为链的长度，A_1 为最小元，A_k 为最大元.

例 5 假设 $x_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 我们可将 $P(X)$ 分成 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个非空的两两不交的链，且对任何 $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，长为 $n-2p+1$ 的链的个数为 $C_n^p - C_n^{p-1}$，这里记 $C_n^{-1}=0$.

解：我们对 n 用归纳法. $n=1$，2 时命题显然.

设命题对 $n-1$ 成立，考虑 $P(X_{n-1})$ 的一个满足条件的划分，记这样划出的所有的链构成的集为 C_{n-1}.

任取 $J_0 \in C_{n-1}$，记 $J_1=\{A \cup \{n\} \mid A \in J_0\}$. 设 J_1 中的最大元为 B_1，则 $J_0 \cup B_1$ 和 $J_1 \backslash B_1$ 是 $P(X_n)$ 中的两个链（有可能为空）. 对 C_{n-1} 中所有的链都作同样操作，易知所得的链是两两不相交的，且长为 $(n-2p+1)$ 的链的个数恰为

$$(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}) + (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^{p-2}) = C_n^p - C_n^{p-1} \qquad (19)$$

这里 $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，对 p 求和即知链的总数 $|C_n| = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

从而命题对任意自然数 n 成立，证毕.

这个证法最初是汉塞尔(Hansel)给出的. 他最初的表述是先作一个 $f: P(X_n) \to \{0,1\}^n$（想一想，f 怎么作？）再对 n 维超正方形 $\{0, 1\}^n$ 的顶点集进行分割，通过对低维情形的尝试，作上述变换是不难想到的. 数形结合往往会得到意想不到的结果.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com