多进制小波分析

An Introduction to Multiband Wavelets

黄达人　毕宁　孙顾彧　著

浙江大學出版社

黄达人 毕宁 孙颀彧 著

多进制小波分析

An Introduction to Multiband Wavelets

浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

多进制小波分析 / 黄达人等著. —杭州：浙江大学出版社，2001.12
ISBN 7-308-02868-2

Ⅰ.多...　Ⅱ.黄...　Ⅲ.小波分析，多进制—研究
Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 082970 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址:http://www.zjupress.com）

责任编辑　张节末
封面设计　宋纪浔
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江印刷集团公司
开　　本　889mm×1194mm　1/32
印　　张　6.25
字　　数　160 千
版 印 次　2001 年 12 月第 1 版　2001 年 12 月第 1 次印刷
印　　数　0001—1000
书　　号　ISBN 7-308-02868-2/O·267
定　　价　13.00 元

前　　言

小波分析有其深刻的理论意义和广泛的应用前景，这些年来得到迅猛的发展。通常所说的小波，是由一个函数(母小波)经过二进伸缩和整平移所产生的 $L^2(\mathbb{R})$ 空间或其他空间的一个基底，视为经典小波。本书所讨论的小波是由 $M-1$个函数 $(M \geqslant 2)$ 经过 M 进伸缩与整平移所产生的某空间的基底，这就是多进制的含义。

本书尽量反映多进制小波的最新研究成果，但不求全。历史的陈述也不多，那怕是作者自己的成果也有很多没有写入。在取舍定理的时候，尽量选能揭示基本性质的那些，而定理的证明也选用一些典型的方法，并且尽量避免同一个方法在不同的场合使用，以拓展读者的思路。那些证明过程过于冗长的定理没有选入，只列了相应的参考文献。对于一些众所周知的结论就不加证明地直接陈述引用。

从数学的角度看，多进制小波与二进制小波是有本质不同的。例如在§2.10节，证明了$M=2$ 时，同时具有对称性和正交性的紧支撑细分函数只有 $[0,1]$ 上的特征函数及其整平移，而对 $M \geqslant 3$ 的情形，读者可以在第四章看到一些同时具有对称性和

正交性的紧支撑细分函数的实例。另外在细分函数的整平移局部线性无关和整体线性无关的等价关系方面，在同时具有正交性和插值性的连续紧支撑细分函数的存在性方面都可以看到这些差异。

本书的编排尽量做到自身完备，那些具备大学分析类数学基础的读者应当可以无困难地读懂全书。我们希望，原先对小波分析不很熟悉的读者可以借助此书对多进制小波有一个基本了解。而熟悉小波分析的读者可以在本书的基础上开展此领域的研究工作。

本书的研究内容得到了国家自然科学基金、天元项目、浙江省自然科学基金、教育部博士点基金的支持，作者在此表示深切的感谢。还要感谢张泽银、戴欣荣、李云章、王振武、刘九芬、王伟、李峰、吴绍权、胡军权、胡国生诸位博士，他们对本书的出版贡献了力量。

由于作者水平和知识所限，书中不妥与错误之处在所难免，还望同行与读者批评指正。

作　者

2001. 10.

目　录

第一章 预备知识

为本书的完整性, 本章将分四节分别简述 Fourier 级数、Fourier 变换、广义函数和内积空间的一些基本性质。有兴趣的读者可进一步参阅 [27,34,56,57,75]。

1.1 Fourier 级数

一个定义在实轴上的函数 f 在满足$f(x+T)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, 时被称为一个周期函数。而常数$T>0$ 被称为上述周期函数f 的周期。在工程应用中, 一个实轴上的函数也被认为是时域上的信号。因此, 一个周期函数也就自然地被称为周期信号。周期信号经常出现于工程应用中, 如图1.1.1 和图1.1.2 的周期矩形脉冲信号和周期锯齿信号。

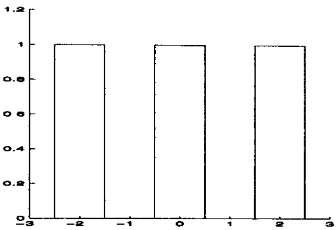

图1.1.1. 周期矩形脉冲信号

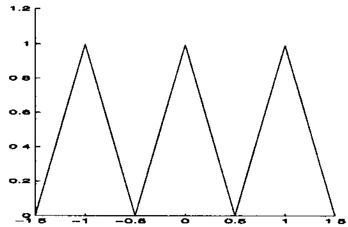

图1.1.2. 周期锯齿信号

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义周期为 $T>0$ 的可测函数 f 的 L^p 模为

$$\|f\|_{L^p_{([0,T])}} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{|T|} \displaystyle\int_0^T |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,T]} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

记所有 L^p 模有限并且周期为 T 的可测函数全体为 $L^p_{([0,T])}$。根据Hölder不等式

$$\|f\|_{L^p_{([0,T])}} \leqslant \|f\|_{L^q_{([0,T])}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty\,.$$

因此函数空间 $L^p_{([0,T])}, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 具有下面的包含关系:

$$L^\infty_{([0,T])} \subset L^q_{([0,T])} \subset L^p_{([0,T])} \subset L^1_{([0,T])}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty\,.$$

对 $L^p{}_{([0,2\pi])}$ 中的函数 $f, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.1.1}$$

显然 $|c_n(f)| \leqslant \|f\|_{L^p_{([0,2\pi])}}$ 对所有整数 n 成立。由此, 对任意的 $L^p_{([0,2\pi])}$ 函数 f, $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界序列。此序列通常被称

为 f 的 Fourier 系数。而形式上的和式 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx}$ 则被称为 f 的 Fourier 级数，并记为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx}. \tag{1.1.2}$$

我们必须指出的是，尽管对任意的 $L^p{}_{([0,2\pi])}$ 函数 f，都有其对应的 Fourier 级数，但决不能断定所对应的 Fourier 级数是收敛的。此外，即使级数在某一点 x 收敛也未必收敛于 $f(x)$。

定理 1.1.1 (Riemann 引理) **设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $f \in L^p_{([0,2\pi])}$，那么 f 的 Fourier 系数满足 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.**

定理 1.1.2（惟一性定理） **设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$f$ 和 g 是 $L^p_{([0,2\pi])}$ 中的二个函数。记 $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{c_n(g)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 分别为其 Fourier 系数。如果 $c_n(f) = c_n(g)$ 对所有的整数 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，那么 $f = g$。**

从上述惟一性定理知，$L^p_{([0,2\pi])}$ 中具有零 Fourier 系数的函数只有零函数。因此此定理可以用来判定两个 $L^p_{([0,2\pi])}$ 函数是否恒同。

定理 1.1.3 (Parseval 恒等式) **设 $f \in L^2_{([0,2\pi])}$。记 f 的 Fourier 系数为 $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$。那么**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

对 $f \in L^p_{([0,2\pi])}$，我们用 $S_n f$ 表示其 Fourier 级数的部分和

$$(S_n f)(x) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}.$$

通过计算，我们可以把部分和S_nf 表示为下述的积分形式

$$(S_nf)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\,.$$

对部分和 S_nf, $n\geqslant 1$, 作 Cesàro 平均

$$(\sigma_nf)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_kf)(x)\,.$$

类似于部分和，σ_nf 可有下面的积分表示公式

$$(\sigma_nf)(x)=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)\frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2(t/2)}\mathrm{d}t$$

但核函数 $K_n(t)=\frac{\sin^2(n+1)t/2}{(n+1)\sin^2(t/2)}$ 是一个 n 次非负三角多项式，它通常被称为 Fejer 核。对任意 $f\in L^p_{([0,2\pi])}$, σ_nf 可在 $L^p_{([0,2\pi])}$ 意义下逼近 f。

定理 1.1.4 设$1\leqslant p<\infty$**以及**$f\in L^p_{([0,2\pi])}$, **则**$\lim\limits_{n\to\infty}\|f-\sigma_nf\|_{L^p_{([0,2\pi])}}=0$。

对任意的2π 周期函数 $f\in L^p_{([0,2\pi])}, 1\leqslant p<\infty$。由于$\sigma_nf, n\geqslant 0$, 是三角多项式。因此，从定理1.1.4 我们得到了三角多项式在 $L^p_{([0,2\pi])}$ 中是稠密的结论。

定理 1.1.5 设$1\leqslant p<\infty$, **那么三角多项式全体所组成的空间在** $L^p_{([0,2\pi])}$ **中是稠密的。**

1.2 Fourier 变换

对实轴上的可测函数 $f(x)$, 定义它的 $L^p(\mathbb{R})$ 模, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 为

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty . \end{cases}$$

记所有具有有限 $L^p(\mathbb{R})$ 模的可测函数全体为 $L^p(\mathbb{R})$。我们通常称 $L^p(\mathbb{R})$ 中的函数为 p 可积函数。当 $p = 1$ 时, $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数也简称为可积函数。

对一个可积函数 f, 我们定义它的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x .$$

有时, 我们也记 f 的 Fourier 变换为 $\mathcal{F}(f)$。Fourier 变换无论在理论上还是在应用中都是十分有用的工具。事实上, Fourier 变换将时域上的信号分布转化为了频域上的信号分布, 而且原信号仍可从频域上的信号分布得到恢复。

从可积函数 f 的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 的定义, 我们看到 $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$。

定理 1.2.1 **设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 那么 f 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)$ 是一个有界连续函数，并且**

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \quad \text{和} \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0 .$$

定义平移算子 $\tau_h, h \in \mathbb{R}$, 和伸缩算子 $\delta_a, a > 0$, 分别为

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h) \quad \text{和} \quad (\delta_a f)(x) = f(ax) , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

对可积函数的 Fourier 变换 $\mathcal{F}(f)$, 我们容易验证下面定理1.2.2 中所述的性质。

定理 1.2.2 设 f, g 为可积函数, 则

(i)(线性性) $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)(\xi)=\alpha\mathcal{F}(f)(\xi)+\beta\mathcal{F}(g)(\xi), \quad \forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$;

(ii)(平移性) $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$ 和 $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot}f)(\xi)=\tau_h\mathcal{F}(f)(\xi)$;

(iii)(伸缩性) $\mathcal{F}(\delta_a f)(\xi)=a^{-1}(\mathcal{F}f)(a^{-1}\xi)$;

(iv)(导数性质) 如果进一步假设 $xf(x)\in L^1(\mathbb{R})$, 那么 $\mathcal{F}(f)$ 可导, 且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)=\mathcal{F}(-\mathrm{i}\cdot f(\cdot))(\xi)$;

(v)如果同时假设 f 和 f 的导数 f' 可积, 并且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$, 那么 $\mathcal{F}(f')(\xi)=\mathrm{i}\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$。

定义 $L^1(\mathbb{R})$ 函数 f 和 $L^p(\mathbb{R})$ 函数 g 的卷积 $f*g$ 为

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,.$$

不难验证

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

以及

$$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g), \qquad \forall\,f,g\in L^1(\mathbb{R})\,.$$

对 Fourier 变换, 我们有下面的 Parseval 恒等式, 即

定理 1.2.3 设 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$。那么

$$\|f\|_2=(2\pi)^{-1/2}\|\widehat{f}\|_2\,.$$

根据 Parseval 恒等式, 我们可以用下列方法定义 $L^2(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换: 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 任取序列 $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), n \geqslant 1$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$。例如取 $f_n = f\chi_{[-n,n]}$, 这里 $\chi_{[-n,n]}$ 表示 $[-n,n]$ 上的特征函数。由 Parseval 恒等式,

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|f_n - f_m\|_2 , \qquad \forall\, n, m \geqslant 1 .$$

从而 $\widehat{f}_n, n \geqslant 1$, 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Cauchy 序列, 由此序列 $\widehat{f}_n$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 有极限。我们定义此极限就为 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 f 的 Fourier 变换。对在此意义下的 $L^2(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换, 我们有

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2 , \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) .$$

定义可积函数 f 的 Fourier 逆变换 $f^\vee$ 为

$$f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi .$$

有时, 我们也用 $\mathcal{F}^{-1}f$ 来表示 f 的 Fourier 逆变换。

定理 1.2.4 **设** $f, \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, **那么**

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f)$$

特别对非负 Fourier 变换 $\mathcal{F}f$, 我们有下面的结论。

定理 1.2.5 **设** $f \in L^1(\mathbb{R}), f$ **在** 0 **点连续和** $\mathcal{F}f \geqslant 0$。**那么** $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ **且** $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$。

Fourier 变换和 Fourier 级数是密切相关的。下面的 Poisson 求和公式 就是一个很好的例证。

定理 1.2.6 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$，假设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ 处处收敛于某个连续函数且 $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 处处收敛，那么

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

经适当的伸缩变型, 定义中的Poisson 求和公式也可以由下面稍微不同的形式来表述:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2ak\pi) = (2a\pi)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(a^{-1}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^{-1}kx},$$

和

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2k\pi)\mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi x}.$$

1.3 广义函数

记所有实轴上具有紧支撑的 $\mathbb{C}^\infty$ 函数全体为 $\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, 所有支撑于紧集 K 的 $\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数全体为 $\mathbb{C}_c^\infty(K)$。一个广义函数 g 是 $\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 上的连续线性形式 $g: \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$, 它满足下面的线性性和连续性条件:

(i) $g(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 g(f_1) + \alpha_2 g(f_2)$, 对所有 $f_1, f_2 \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ 成立;

(ii) 对任一紧集 K, 存在自然数 N 和正数 C, 使得下式成立

$$|g(f)| \leqslant C \sup_{|k|\leqslant N} \|f^{(k)}\|_\infty, \qquad \forall f \in \mathbb{C}_c^\infty(K),$$

在此 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 次导数。

定义 Schwartz 函数类 $\mathcal{S}$ 为

$$\mathcal{S}=\left\{f\in\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}):\quad \|f^{(k)}(x)(1+|x|)^{l}\|_{\infty}<\infty,\quad \forall k,l\geqslant 0\right\}.$$

从 Schwartz 函数的定义可以看出 $\mathbb{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}$。Schwartz 函数类的一个重要的性质就是 Schwartz 函数的 Fourier 变换仍是 Schwartz 函数。

一个缓增分布 g 是 Schwartz 函数类 $\mathcal{S}$ 上的连续线性形式 $g:\mathcal{S}\longmapsto\mathbb{R}$, 它满足下列两个条件:

(i) $g(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 g(f_1)+\alpha_2 g(f_2)$, 对所有 $f_1,f_2\in\mathcal{S}$ 和 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 成立;

(ii)存在正整数 N_1,N_2 和正数 C, 使得

$$|g(f)|\leqslant C\sup_{|k|\leqslant N_1}\|f^{(k)}(x)(1+|x|)^{N_2}\|_{\infty},\qquad \forall f\in\mathcal{S}.$$

在本书中, 我们也简称缓增分布为分布。显然缓增分布是一个广义函数。下面是一些缓增分布的典型例子:

(i) δ 分布, 它与 $f\in\mathcal{S}$ 的作用为 $\delta(f)=f(0)$;

(ii) $L^p(\mathbb{R})$ 函数 $g, 1\leqslant p\leqslant\infty$, 它与 $f\in\mathcal{S}$ 的作用定义为 $g(f)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$;

(iii) 多项式控制的可测函数 g, 即存在多项式 $P(x)$ 使得 $|g(x)|\leqslant|P(x)|$, 此时我们定义 $g(f)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

由于 Schwartz 函数的 Fourier 变换仍是 Schwartz 函数, 我们可以通过下面方式来定义缓增分布 g 的 Fourier 变换 $\widehat{g}$:

$$\widehat{g}(f)=g(\widehat{f}),\qquad f\in\mathcal{S}.$$

可以验证，上述方式定义的缓增分布 g 的 Fourier 变换 $\widehat{g}$，在 g 是 $L^1(\mathbb{R})$ 函数或 $L^2(\mathbb{R})$ 函数时，与我们以前定义的 Fourier 变换相同。对于 δ 分布，它的 Fourier 变换就是常值函数 1。

我们将利用 Fourier 变换考虑缓增分布的收敛性。

定理 1.3.1 **设 $g_n, n \geqslant 1$，是一列广义函数，且它们的 Fourier 变换 $\widehat{g}_n$ 是可测函数并受某一多项式控制，即存在多项式 $P(\xi)$ 使得 $|\widehat{g}_n(\xi)| \leqslant P(\xi)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 成立。如果 $\widehat{g}_n, n \geqslant 1$，在任一紧集上一致收敛，那么 $g_n, n \geqslant 1$，在分布意义下收敛于某个缓增分布。**

1.4 内积空间

一个实线性空间 X 上的内积，指的是一个二元数值函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$，它满足下列条件:

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in X$;

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in X$;

(iii) $\langle x, x \rangle > 0, \quad \forall 0 \neq x \in X$.

一个带有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的实线性空间 X，通常被称为内积空间，并记为 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$。对实内积空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 中的任一 x，定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$。不难验证 $\| \cdot \|$ 是一个范数。从而，我们可以由范数引入实内积空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的拓扑。在上述范数所引入的拓扑意义下，$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个完备的拓扑空间时，我们称此实内积空间为实 Hilbert 空间。类似地，我们可以定义复内积空间和复 Hilbert 空间。但此时条件 (i) 中的常数 α, β 为复数，而条件 (ii) 改为: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ 对所有的 $x, y \in X$ 成立。