# 初中代数

## 课内外辅导与水平测试

## 4

陶晓永　杨大淳　合编

天津教育出版社

# 编 者 的 话

本书是按照人民教育出版社出版的初级中学课本代数第四册的体系和中学数学教学大纲的要求编写的。目的是为了辅导初中学生更好地掌握课本中的基础知识、基本技能和一般的解题思路和方法，使学生提高运用知识的能力。

本书包括有常用对数、函数及其图象、解三角形三章。每章分四部分，一是本章概述，主要是阐述本章内容间的内在联系，以及与其他章的联系；二是疑难解析，主要是对重要的和难以理解的概念进行辨析，以及方法的总结；三是课外阅读，其中有与这册代数内容有关的历史知识，还有与本册知识有紧密联系程度略深的知识，以及趣味问题；四是典型题分析和习题。书中最后还安排了两套水平测试题与练习、习题和水平测试题参考答案与提示，可供读者检查自己的学习效果。

本书可供初中三年级学生和自学青年使用，也可供初中数学教师参考。

1987年12月

# 目　录

# 第十三章　常用对数

## 一、本章概述

本章的主要内容包括对数的概念及其运算性质、常用对数的特殊性质、利用对数进行计算三部分.

指数与对数是初中代数中一个重要的组成部分，是高中进一步学习指数函数和对数函数的基础.学完了本章内容后，对于中学代数中在实数范围内所研究的加、减、乘、除、乘方、开方、指数及对数等运算，将会有较完整的了解.同时，利用对数表和反对数表进行计算的方法，将会把一些多位数的乘、除、乘方、开方运算大为简化，因此对数在社会实践中起着重要的作用，是常用的数学工具之一.

本章首先在指数概念推广的基础上给出了对数的概念，并从对数的概念出发阐明了指数式与对数式相互转化的关系，引出了对数恒等式.接着根据指数的运算性质和对数的定义，推导出积、商、幂、方根的对数的运算性质，为对数式的恒等变形及利用对数进行计算提供了依据.然后重点研究了常用对数的特殊性质，常用对数的首数、尾数和真数的求法.最后介绍了常用对数表和反对数表的查法以及利用对数进行计算的方法.

本章知识的重点是利用对数进行计算.能够正确熟练地进行对数计算的关键在于牢固掌握对数的运算性质.而掌握

好对数的运算性质又基于深刻理解对数的定义和正确掌握幂的运算法则.所以,透彻理解对数的概念是学好本章内容的关键.同时,正确理解对数概念又是本章的难点，要突破这一难点，必须搞清对数式$\log_a N=b$与指数式$a^b=N$中各字母的对应关系，从而认识到对数仅仅是指数的另一种表现形式.另外，含有负首数的对数计算应该分成首数和尾数两部分分别进行，以避免计算错误.

## 二、疑难解析

### （一）对数概念

课本上通过具体实例引入了对数的定义：

一般地说，如果$a$（$a>0$，$a\neq 1$）的$b$次幂等于$N$，即$a^b=N$，则数$b$就叫做以$a$为底的$N$的对数，记作$\log_a N=b$，其中$a$叫做底数，$N$叫做真数.

为了正确理解这个定义，必须首先明确下面几个问题.

1.对数式$\log_a N=b$与指数式$a^b=N$本质上相同

根据对数的定义，我们知道对数式$\log_a N=b$是由指数式$a^b=N$转化得到的.这两个等式都反映了相同的三个数量$a$、$b$、$N$之间的关系，它们只是形式不同，本质是相同的.因此它们之间可以相互转化：$a^b=N \Longleftrightarrow \log_a N=b$.

下面举几个例子说明指数式与对数式的关系.

| 指数式 | | 对数式 |
|---|---|---|
| $2^3=8$ | $\Longleftrightarrow$ | $\log_2 8=3$ |
| $5^0=1$ | $\Longleftrightarrow$ | $\log_5 1=0$ |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ | $\Longleftrightarrow$ | $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=2$ |

$$10^{-2}=0.01 \Longleftrightarrow \log_{10}0.01=-2$$

$$4^{\frac{1}{2}}=2 \Longleftrightarrow \log_4 2=\frac{1}{2}$$

一般地有：

$$a^0=1 \Longleftrightarrow \log_a 1=0 \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$a^1=a \Longleftrightarrow \log_a a=1 \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

应当指出，根据对数定义将指数式$a^b=N$与对数式$\log_a N=b$相互转化，它们的底数$a$相同，并且$a>0$，$a\neq 1$.

利用下表把指数式与对数式进行对照是有益的：

| 式子 | 名称 | | | 意义 |
|---|---|---|---|---|
| | $a$($a>0$且$a\neq 1$) | $b$ | $N$ | |
| 指数式$a^b=N$ | 底数 | 指数 | 幂 | $a$的$b$次幂等于$N$ |
| 对数式$\log_a N=b$ | 底数 | 对数 | 真数 | 以$a$为底$N$的对数等于$b$ |

概括地说，对数式$\log_a N=b$仅仅是指数式$a^b=N$的另一种表现形式；掌握二者的相互转化，就给予了研究对数的方法，即把对数式改写成指数式，再利用已学过的指数性质推导出对数的性质.

2.对数定义中规定$a>0$，$a\neq 1$的理由

在指数式$a^b=N$中，根据分数指数幂的概念，只有当$a>0$时$a^b$才永远有意义，所以在对数式$\log_a N=b$中也必须同样规定$a>0$.

这里规定$a\neq 1$是因为如果$a=1$，那么不论指数$b$是任何数，总有$1^b=1$，这时$b=\log_1 1$是不确定的，这样的问题就没有研究的必要.另外，当$N\neq 1$时，指数式$1^b\neq N$，即$\log_1 N$

不存在。因为$1^b \neq 2$，所以$\log_1 2$不存在。由此看出，必须规定$a \neq 1$，也就是说不能用1作为对数的底数。[1]

读者还应注意到，指数定义中只要求底数$a > 0$，这是两个定义的区别之一。

3.对数运算是指数运算的逆运算

以前我们用等式$N = a^b$规定幂的定义，幂是指数运算的结果，$N$叫做$a$的$b$次幂。当底数$a$事先给定时，已知指数$b$求幂$N$的运算就是指数运算。

例如，求3的2次幂，这就是指数运算，记作

$$3^2 = 9,$$

这里9是指数运算式$3^2$的运算结果，9是3的二次幂。

反过来，我们用等式$b = \log_a N$规定对数的定义，$b$叫做以$a$为底$N$的对数。当底数$a$事先给定时，已知真数$N$求对数$b$的运算就是对数运算，对数$b$就是这个运算的结果。

例如，求9是3的多少次幂？这就是对数运算，即对9进行以3为底的对数运算，记作

$$\log_3 9 = 2,$$

这里2是对数运算式$\log_3 9$的运算结果，即2是以3为底9的对数。

由此可知，在底数$a$已确定的前提下，已知真数$N$求对数$b$与已知指数$b$求幂$N$是互逆的，对数运算就是指数运算的逆运算，在这里引入符号$\log_a$就是表示这个新运算的。正象"+"、"−"、"×"、"÷"、"$\sqrt{\ }$"等符号一样，也表示一种运算。不过对数运算的符号写在数的前面。

---

[1] 在本书的对数式中，如果不加特殊说明，底数都是不等于1的正数，真数都是正数。

4.对数概念的引入是为了简化运算

对数产生于十七世纪，当时随着生产的不断发展，对于数的计算量越来越大，在天文学、航海学、测量学、声学、电学等科学领域都要求寻找一种简便的计算方法．科学家注意到指数运算的法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn};\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

这里同底数幂的乘除运算转化为它们的指数间的加减运算；幂的乘方、开方运算转化为它的指数的乘除运算．显然，每种运算都相应地降级了，即高一级运算转化为低一级运算，使运算简化．

例如，计算

$$32\times 64 = 2^5\times 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11} = 2048;$$

$$4096\div 256 = 2^{12}\div 2^8 = 2^{12-8} = 2^4 = 16;$$

$$\sqrt[3]{19683} = (3^9)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{9}{3}} = 3^3 = 27.$$

这样做的关键是把一个正数化成给定底数的幂，即在给定底数的条件下找出指数．前面例子中容易求出32与64在给定底数为2的情况下指数为5和6．一般地，要把正数$N$化为以$a$为底的幂，指数$b$是什么？规定$\log_a N = b$就解决问题了，这就是学习对数的作用．

5.对数的真数必须大于零

在对数定义中，规定了底数$a>0$，根据指数性质，正数的任何次幂都是正数❶，因而$a^b = N$中的$N$总是正数，即

❶ 在实数范围内．

$N>0$.也就是说，在$\log_a N=b$中，必须真数$N>0$.所以，当真数是零和负数时，式子$\log_a N$没有意义，正象分母是零时分式无意义一样。

**例** 当$x$取什么值时，对数式$\log_3(2x-1)$有意义？

**解** 因为零和负数没有对数，所以

$$2x-1>0，可见x>\frac{1}{2}.$$

因此当$x>\frac{1}{2}$时，$\log_3(2x-1)$有意义。

6.利用对数概念求值

（1）已知底数、真数、对数之中任意两个数，求第三个数。

**例** 求下列各式中的$x$：

1）$\log_5 x=-3$； 2）$\log_x 2=\frac{1}{4}$；3）$\log_{\sqrt{2}}128=x$.

**解** 1）由对数定义可得

$$x=5^{-3}=\frac{1}{125}.$$

2）由对数定义可得

$$x^{\frac{1}{4}}=2.$$

两边四次方，得

$$x=2^4=16.$$

3）由对数定义可得

$$(\sqrt{2})^x=128.$$

把两边化为同底数的幂，得

$$2^{\frac{x}{2}}=2^7.$$

所以

$$\frac{x}{2}=7.$$

即

$$x=14.$$

**说明** 在对数式$\log_a N=b$中，由已知$a$、$b$、$N$三个数中的两个，求第三个数的值，都是根据对数的定义把$\log_a N=b$转化成指数式$a^b=N$.当已知$a$、$b$求$N$或已知$N$、$b$求$a$时，就是指数运算问题；当已知$a$、$N$求$b$时，可以通过化成同底幂后比较指数的办法求解.

（2）基本对数的值

根据指数式$a^0=1$，$a^1=a$，由对数定义可以推导出：

$$\log_a 1=0.$$

即1的对数等于零；

$$\log_a a=1.$$

即底的对数等于1.

这两个式子是对数的两个基本性质，我们用同样的方法可以得到更一般的结论.

**（二）对数基本恒等式**$a^{\log_a N}=N$

1.恒等式成立的条件

在指数式$a^b=N$中，根据对数定义，$b=\log_a N$.如果把$b=\log_a N$再代入$a^b=N$中，就得到

$$a^{\log_a N}=N.$$

因为这个等式对于任意不等于1的正数$a$与任意的正数$N$都是成立的，例如

$$2^{\log_2 5}=5;\quad 3^{\log_3 5}=5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}5}=5;\quad (\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}4}=4.$$

这里真数都是正数，底数都是大于零且不等于 1 的正数，所以，我们把这个等式叫做对数恒等式。

对于初学者来说，对数恒等式的应用是比较困难的，不过随着学习的深入，是完全可以掌握的。

此外，这个恒等式含有两个字母$a$与$N$，对数$\log_a N$又是新建立的概念，不妨通过一些简单的实例，如把 $\log_2 4=2$, $\log_2 8=3$，$\log_2 16=4$代入恒等式左边，就得

$$2^{\log_2 4}=2^2=4,$$

$$2^{\log_2 8}=2^3=8,$$

$$2^{\log_2 16}=2^4=16.$$

通过这些特殊实例，验证了对数恒等式，从而可增加形象认识，有益对问题的理解。

2.应用公式把正数写成任何底的幂

对数恒等式深刻地揭示出研究对数的目的：任何一个正数$N$都可以写成以不等于 1 的任何正实数 $a$ 为底的幂，而这个幂的指数是$\log_a N$。

例如

$$5=2^{\log_2 5}=3^{\log_3 5}=0.6^{\log_{0.6}5}=a^{\log_a 5}\ (a>0, a\neq 1).$$

3.注意正确应用对数恒等式

首先，必须注意对数恒等式成立的条件是

$$a>0,\ a\neq 1,\ N>0,$$

否则等式$a^{\log_a N}=N$不成立。

例如，因为符号$\log_2(-4)$没有意义，所以，$2^{\log_2(-4)}$不等于$-4$。因此，$2^{\log_2(-4)}=-4$是不对的。同样$(-2)^{\log_{(-2)}4}$

$=4$ 也是错误的.

其次，应用对数恒等式时，要注意幂的底数和对数的底数必须相同．对 $N$ 进行以 $a$ 为底的对数运算，即取以 $a$ 为底的 $N$ 的对数，再对运算结果 $\log_a N$ 进行以 $a$ 为底数的指数运算，即求 $a$ 为底数的 $\log_a N$ 次幂，最终结果仍是 $N$. 由此不难看出，当事先给定底数 $a$ 时，对数运算是指数运算的逆运算，$\log_a N$ 与 $a^b$ 这两种运算互相抵消，正象加一个数再减去同一个数互相抵消一样.

我们知道

$$2^{\log_3 9}=2^2=4.$$

显然

$$2^{\log_3 9}\neq 9.$$

如果把幂的底数 2 改为 3，则有

$$3^{\log_3 9}=3^2=9.$$

**例** 计算 $36^{\log_6 21}$.

**解** $36^{\log_6 21}=(6^2)^{\log_6 21}=(6^{\log_6 21})^2=21^2=441.$

总之，对数恒等式在进行对数式的恒等变形方面有着广泛应用，应该牢固掌握它.

**（三）对数的运算性质**

对数的运算性质是指积、商、幂、方根的对数法则：

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$

$$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$$

$$\log_a M^n=n\log_a M$$

（$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$n$是大于 1 的自然数）

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

（$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$n$是大于 1 的自然数）

1.掌握四个公式的推导过程

课本上这四个公式的证明方法，概括起来就是根据指数式与对数式的相互转化，以及指数的运算性质加以论证的。

下面以方根的对数法则为例加以说明：

设 $$\log_a M=P,$$

由对数的意义可化为指数式

$$a^P=M.$$

两边开$n$次方，得

$$\sqrt[n]{M}=\sqrt[n]{a^P}.$$

根据指数运算法则可知

$$\sqrt[n]{a^P}=a^{\frac{P}{n}},\ \text{即}\sqrt[n]{M}=a^{\frac{P}{n}}.$$

再把指数式化为对数式，得

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{P}{n}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

透彻理解推导过程中每个步骤的理论根据，这是掌握和运用公式的基础。

2.运用公式要注意字母取值范围

使用这四个公式时，必须注意对数的底数$a>0$，且$a\neq1$，真数$M>0$，$N>0$。

例如，$\log_2(-4)(-2)$不等于$\log_2(-4)+\log_2(-2)$。因为$\log_2(-4)(-2)=\log_2 8=3$，而$\log_2(-4)$、$\log_2(-2)$没

有意义，所以$\log_2(-4)(-2) \neq \log_2(-4) + \log_2(-2)$。

类似地，$\log_2(-5)^2 \neq 2\log_2(-5)$，

$$\log_5(-12) \neq \log_5 4 + \log_5(-3).$$

总之，只有当公式中每一个对数都有意义时，这个公式才成立.

3.纠正和防止各种错误认识

初学者在进行对数运算时，常会出现以下各种错误：

$$\log_a(M+N) = \log_a M + \log_a N,$$

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M \cdot \log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \frac{\log_a M}{\log_a N},$$

$$\log_a M^n = (\log_a M)^n,$$

$$\lg 9 + 1 = \lg 10,$$

$$\frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_a M - \log_a N.$$

产生这些错误的原因主要是对四个公式的结构特点没有掌握，忘记了对数运算的目的是要把高一级运算降为低一级运算，同时把积、商、幂的对数与对数的积、商、幂混淆了.

为了防止出现类似的错误，必须在对数运算中注意考虑每一步骤的根据；也可以将算式中的字母换为具体的数字以检验其正误.

例如 $\log_a(M+N) = \log_a M + \log_a N$ ①

令 $a=2$，$M=4$，$N=4$，

左边 $= \log_2(4+4) = \log_2 8 = 3$，

右边 $= \log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$.

由此可知①式不正确.

4. 对数运算性质的推广

$$\log_a(MNP)=\log_a M+\log_a N+\log_a P, \quad ①$$

$$\log_a N^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}\log_a N. \quad ②$$

这里$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$，$P>0$，$m$与$n$是大于1的自然数.

推证①
$$\begin{aligned}&\log_a(MNP)\\=&\log_a[(MN)\cdot P]\\=&\log_a(MN)+\log_a P\\=&\log_a M+\log_a N+\log_a P.\end{aligned}$$

推证②
$$\begin{aligned}&\log_a N^{\frac{m}{n}}\\=&\log_a(\sqrt[n]{N})^m\\=&m\log_a\sqrt[n]{N}\\=&m\cdot\frac{1}{n}\log_a N\\=&\frac{m}{n}\log_a N.\end{aligned}$$

读者首先要熟练、准确、灵活地使用对数运算性质，其次可以做一些由简单到复杂的练习题.

**例1** 用$\lg a$，$\lg b$，$\lg c$，$\lg d$表示$\lg\frac{abc}{d}$.

**解** $\lg\frac{abc}{d}=\lg(abc)-\lg d=\lg a+\lg b+\lg c-\lg d$.

**例2** 已知$\lg x=\lg a+\lg b-\lg c$，求$x$.

**解** 因为 $\lg a+\lg b-\lg c$