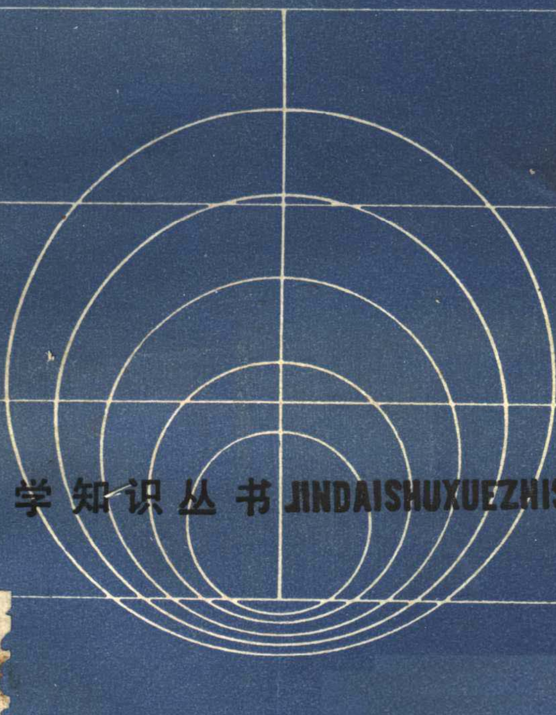
集合入门

毛正中 编



近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

近代数学知识丛书

集合入门

毛正中

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑　韩承训
封面装帧　邱云松

近代数学知识丛书　　集合入门

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　自贡新华印刷厂印刷

开本 787×960 毫米　　印张 5 插页 2　字数 90 千
1988年2月第一版　　1988年2月第一次印刷
印数：1—1,580 册

ISBN7-5408-0278-2/G·245　　定价：0.91 元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见后勒口所列，大多为中学教学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛

书也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《集合入门》由毛正中同志撰写。作者要求在出版时特别说明，此书在编写过程中承四川大学数学系周浩旋副教授认真审订，谨此表示衷心的感谢。由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，敬希读者批评指正。

编　者　一九八四年三月

目　录

一 引 言

集合论是1874年到1879年间，德国数学家、逻辑学家乔治·康托尔创立的。

集合论以研究无穷对象为中心，它以全新的观点把无限集处理为一个数学对象——一个与能用有限多个步骤构造起来的对象具有同等地位的对象。

自古以来，大多数数学家都小心翼翼地竭力避开讨论实际存在的“无限”，这种情况一直持续到十九世纪末，因而康托尔的工作当时遭到很多人的非难，说他研究虚构的假设没有意义。实际上，这是由于他的工作“侵入”了哲学家们的传统领地，违背了“神圣”的宗教原则。正因为此，康托尔著作在当时未能及时发表。然而，一当人们发现了它在分析中的应用，情况就起了变化，到19世纪90年代，康托尔的思想和结果便开始得到了承认；1900年左右，集合论已被公认为一个独立的数学分支了。概率论中著名的第二次公理化的提出者柯尔莫哥洛夫曾高度评价康托尔的工作，说康托尔的不朽功绩，在于他敢于向无穷大迈进，对似是而非之论，流行的成见、哲学的教条，以及大数学家们的

信念作了不懈的斗争，由此使他成为一门新科学的创造者，而这门科学在今天已成了整个数学的基础。另一位数学家布尔巴基在《Éléments de mathématique（数学原理）》一书中，谈到集合论取得的成功及它今天的发展状况时写道："现已知道，从逻辑上说，整个已知的数学都可以从一个源头导出，这个源头就是集合论。"因此，可以说，不懂得集合论的理论和方法，就不能理解今天的数学。

随着数学的发展，集合论本身也曾出现过问题，即出现了悖论，其中影响最为深远的是1903年发表的罗素悖论。这使集合论受到巨大的冲击，使许多数学家产生了动摇，他们问："集合论还是可靠的吗？"为了回答这个严肃的问题，同时也由于集合论经过三十年的发展，积累了大量的科学成果，有必要进行更为系统的整理，于是，集合论的公理化就势在必行了。这样，便出现了若干不同风格的公理系统，它们将种种悖论尽行排除，从而保卫和发展了集合论的已有成果，并形成了集合论研究的新的强有力的工具。

这本小册子，主要是介绍康托尔集合论（朴素集合论）中一些基本理论和方法，为读者提供进一步深入学习集合论的比较详细的基础知识和基本训练的材料，提供学习其它数学内容所必须的预备知识。全书内容浅显易懂，任何一个具有中等文化水平的读者，只要循序渐进地读下去，就可望掌握本

书介绍的基本理论和方法，而不会感到太吃力。当然，“集合的基数”中的某些内容，如基数的和、积、和与积的关系及基数的幂等，初学者可能会觉得有些困难。这些内容我们用小号字排出，初读时可略去，而有一定数学基础的读者则可以读下去。

二　集合及其运算

2.1　集合的概念

什么是集合？这是不能用精确的数学语言表达的基本术语，只能描述性地定义．所谓**集合**（有时也简称**集**），就是确定的能够区别的直观或思维的对象汇集在一起的一个整体．实际上，这就是康托尔所给出的最初定义．这里所谓“确定的能够区别的对象”，是指能确定两个对象是同一的呢还是不同的，并且能够判断是不是那个集合中的对象．简言之，集合就是把一个个的个体合起来组成的一个整体．

【例1】 全部中国人构成一个集合．因为，任何一个人，我们都能断定他是不是中国人；而对任意不同的两个人，显然我们都能区别出来这是某甲，那是某乙．

【例2】 全体自然数构成一个集合．

【例3】 平面上$x^2+y^2=1$的圆内的全部点构成一个集合．象这样由平面（或空间）的点组成的

集合，通常称为**点集**。

【例4】 很大的数的全体，不能说是一个集合。因为，什么是“很大的数”，界限很不清楚。1000000以上的数是很大的数吗？或者，112000000是很大的数吗？无法确定。

【例5】 细长的三角形的全体，也不能说是一个集合。因为，什么样的三角形才算是细长的三角形呢？无法确定。

构成集合的对象，称为集合的**元素**。我们用大写字母A、B、C…表示集合，用小写字母a、b、c…表示集合的元素。根据集合的定义，对一个集合A，a要么是这个集合中的元素，这时就称a**属于**A，记作$a \in A$；要么a不是A中的元素，这时就称a**不属于**A，记作$a \notin A$。例如用A表示例3中的集合，那么，$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A$，而$(0, 2) \notin A$。

当然，作为集合的元素本身也可以是集合。

【例6】 若用N表示全体自然数的集合，用J表示全体整数的集合，用Q表示全体有理数的集合，用R表示全体实数的集，用C表示全体复数的集合（本书以后均将沿用这些符号），我们可以考虑以N、J、Q、R、C为元素的集合。

在上述集合的例子中，有的集合的元素只有有限多个，如例1；而有的集合的元素个数不是有限的，如例2、例3。我们将“元素个数是有限的”集合，称为**有限集**，而将“元素个数不是有限的”集

合，称为**无限集**。以后我们将会看到，这两种集合之间存在着本质的差别。

2.2 集合的表示法

1．列举法（亦称外延记法）

这种记法就是把集合的所有元素在花括号"{ }"中一一列出。比如，若集合A由a、b、c…组成，则记

$$A=\{a, b, c, \cdots\}.$$

【例1】 集合A仅由一个元素a组成，则记$A=\{a\}$.我们称只有一个元素的集合为**单元集**。

【例2】 2.1节例6中所考虑的集合，若用$\mathscr{B}$表示，则

$$\mathscr{B}=\{\mathrm{N}, \mathrm{J}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{C}\},$$

【例3】 全体自然数的集合N可记作

$$\mathrm{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

一个集合由它的元素完全地决定了（关于这一点，在2.3节中还要论及），因此，若A是由1、2、3三个元素构成的集合，则可记$A=\{1, 2, 3\}$，或记$A=\{3, 1, 2\}$等等，即与元素的书写顺序无关。又，在集合$\{1, 2, 1, 3\}$中，虽有两个1，但它们是同一元素，所以这个集合仍旧是集合A。

【例4】 只有两个元素x、y组成的集合$A=\{x, y\}$，这两个元素之间是没有顺序的，我们

称之为**无序对集**。

应该注意的是，在这种记法中省略号“…”的使用，比如在例3中，对于{1，2，3，…}，由所出现的代表元素，任何人都会想到后面“…”所表示的是4，5，6以至于全部自然数；但是，若写出{1，$\sqrt{5}$，9，2，…}，其中的“…”表示什么呢？这是无法知道的。所以，列举法常常是用来表示元素可一一列出的有限集合，或是代表元后的“…”所表示的元素容易推测出来的那种无限集合．那么，除此而外的集合，比如2.1节例3中的集合（平面上的圆 $x^2+y^2=1$内的全部点的集合），又用什么方式表示呢？另外，即使是有限集合，但它的元素比较多，比较复杂，用列举法表示也极不方便，比如：

【例5】 A＝{50625，65536，83521，104976，130321，160000，194481}。

为此，我们必须寻求另外的记法。

2．描述法（亦称概括记法）

这种记法就是把集合的元素的共同属性，或者说集合的元素所满足的条件写在花括号内．即，若A是满足某个条件P的元素x的集合，则记

$$A=\{x\mid P(x)\},$$

其中，“$P(x)$”是“x满足条件P”的缩写，当然，这里的字母x也可用别的字母，比如y、z等来代替，但在同一记法中要用同一字母。

【例6】 单元集$A=\{a\}$可记为

$$A=\{x \mid x=a\}.$$

【例7】 例3中的集合N可记为

$$N=\{x \mid x\text{是一切自然数}\}.$$

【例8】 若用A表示平面上圆$x^2+y^2=1$内的点的集合，则A可记为

$$A=\{(x, y) \mid x^2+y^2<1\}.$$

【例9】 仔细地考察一下就会发现，例5中集合A的元素分别是15，16，…，21这7个数的4次方，所以，A可记作

$$A=\{y \mid y=x^4,\ x\text{是自然数且}15\leqslant x\leqslant 21\}.$$

显然，若x不是在15与21之间，而是在15与210000之间，那么用列举法表示A就几乎无法实施了。

【例10】 $A=\{x \mid x^2+1=0\text{的实数解}\}$. 方程$x^2+1=0$没有实数解，所以集合A没有任何元素。我们把这种没有任何元素的集合称为**空集合**，记为ϕ.空集合常常也写作$\{x \mid x\neq x\}$，因为无论在直观或思维的对象中，不存在这样一个确定的能够区别的对象，它是不等于它自己的。

空集合只有唯一的一个。因为集合由它的元素决定，任何两个没有元素的集合，都是同一个集合。

注意：$\{0\}$不是空集，而是一个单元集，即它只有一个元素0。$\{\phi\}$也不是空集，因为它有一

个元素ϕ。若把ϕ与$\{\phi\}$比喻成两个人，则前者是一无所有，而后者有一个空袋子。显然，$\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$是三个元素的集合。

2.3 集合与集合的关系——包含和相等

首先，我们给出相等的概念。

一个集合，是由那些确定的、能够区别的对象，即它的元素决定的。因此要考察两个集合是否相等，就要看它们是否有相同的元素。

定义1 若集合A的每一个元素都是集合B的元素；反之，集合B的每一个元素也都是集合A的元素，则称集合A与集合B是**相等**的，记作A＝B。

用符号来表示这个定义，就是：若对每一个$x \in A$，都有$x \in B$；同时，对每一个$x \in B$，都有$x \in A$，那么$A = B$。

例如，可以直接由定义验证$\{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$，$\{50625, 65536, 83521, 104976, 130321, 160000, 194481\} = \{y \mid y = x^4$，$x$是自然数且$15 \leqslant x \leqslant 21\}$。

当集合A与B不是相等的时，就称集合A与B是**不等**的，记作$A \neq B$。$A \neq B$并不要求A和B的所有元素都不相同，但至少要有一个元素不同。即，至少存在一个$x \in A$，但$x \notin B$；或者至少存在一个$x \in B$，但$x \notin A$，例如，设$A = \{1\}$，$B = \{x \mid x^2 = 1\}$，则$A \neq B$，因有$-1 \in B$，但$-1 \notin A$。

在给出包含的定义前，我们先看一个实例。

设某校高二·一班的全体学生组成的集合为B，由该班全体女生组成的集合为A，若某甲是该班的女生，即甲$\in$A，那么她必定也是该班的学生，故必有甲$\in$B。显然，集合A是集合B的一部分。在集合论中，称A是B的子集。

定义2 若集合A的所有元素都是集合B的元素，则称A是B的**子集**，这时也称**A包含在B中**或**B包含A**，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。若用符号表示，就是：若每一个$x\in A$，都有$x\in B$，则$A\subseteq B$或$B\supseteq A$；否则（即至少有一个元素x，使得$x\in A$，但$x\notin B$），就称**A不包含在B中**，或**B不包含A**，记作$A\nsubseteq B$或$B\nsupseteq A$。

定义3 若集合A的每个元素都是集合B的元素，且集合B中存在着不属于A的元素，则称**A**是B的**真子集**，记作$A\subset B$或$B\supset A$。若用符号表示，就是：若$A\subseteq B$，且存在$x\in B$，但$x\notin A$，则$A\subset B$。

容易从定义直接验证：$\mathbf{N}\subset\mathbf{J}$，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$，$\{1, 2\}\subset\{1, 2, 3\}$等等。

应当注意“$\in$”（属于）和“$\supseteq$”（包含）的区别。我们可以形象地把集合A、B看作两个袋子，若要考察是否有$A\subseteq B$，那么必须把袋子A打开，看看它的元素是不是都能在袋子B内的元素中找到；而“$\in$”是元素与集合间的类属关系，若要考察$A\in B$是否成立，就要把整个袋子A视为一个元