

中小学教师参考丛书

初中数学解题思路与方法

光明日报出版社

初中数学解题思路与方法

主编	翟连林	赵学恒	
编者	张 森	包韬略	赵连音
	笪祖辉	胡继武	侯吉生
	张晓斌	刘妙龙	汪玉科
	陈世民	陈启耀	杨志刚

光 明 出 版 社

初中数学解题思路与方法

翟连林 赵学恒 主编

*

光明日报出版社出版发行

(北京永安路106号)

新华书店北京发行所经销

保定市六中印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32 开本 15.125 印张 340千字

1991年4月第1版 1991年4月第一次印刷

1—18270册 定价：6.00元

统一书号：ISBN7—80014—998—6/G·361

丛书出版说明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育，提高教育质量的关键是教师。为了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特级教师、高级教师和教研员，编写出版了这套“中小学教师参考丛书”。

这套丛书的主要内容是：交流教学经验、教学资料 and 教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

“中小学教师参考丛书”编委会

1991. 2.

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

总主编 瞿连林

编 委 (以姓氏笔划为序)

丁家泰	马 奕	马学声	方昌武	王学功	王家宝
王洪涛	王保国	冯跃峰	叶龄逸	齐锡广	刘效曾
刘盛锡	李作斗	李登印	李海秀	李福宽	陈久华
陈士杰	陈仁政	陈鸿侠	吴乃曦	余新耀	岳明义
周清范	林福堂	林增铭	段云鑫	姚兴耕	施英杰
顾松涛	项昭义	贾 遂	贾士代	徐玉明	常克峰
张东海	张守义	张国旺	傅 立	曾星发	杨志刚
赵用金	赵光礼	赵国民	赵学恒	瞿连林	韩召毅

前 言

为了帮助青年教师熟悉教材，把握重点与难点，明确教学要求，掌握解题方法，提高教学质量，我们总结多年讲授初中数学课的教学经验编成本书。

本书基础知识精炼，重点与难点分析透彻，对于精选的典型例题着重进行解题思路的分析，总结解题方法（如分析法、数形结合法、换元法、判别式法等）。为了培养能力，每章针对基础知识安排有基础练习，还配备了新颖、典型的各类习题精荟，各章有测试题，全书有综合测试题，所有题目都附有答案或提示。

由于我们的水平有限，书中缺点与错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1991年11月

目 录

第一章	实 数	(1)
第二章	整 式	(28)
第三章	分式与根式	(52)
第四章	指数与对数	(86)
第五章	方程与方程组	(110)
第六章	不等式	(163)
第七章	函数及其图象	(180)
第八章	解三角形	(211)
第九章	统计初步	(243)
第十章	几何基本概念	(256)
第十一章	三角形	(282)
第十二章	四边形	(316)
第十三章	相似形	(340)
第十四章	圆	(369)
第十五章	综合解题	(402)
第十六章	综合测试题	(454)

第一章 实数

基 本 内 容

一、基本内容：本章包括实数的有关概念，实数大小的比较和实数的运算等三部分。

二、重点难点：初中代数主要研究以数和表示数的字母为基本元素，以加、减、乘、除为基本运算，以式子（主要是代数式、等式和不等式）的变形（恒等变形和同解变形）求值和求解为主要内容。其中实数运算是整个代数中的基本运算，熟练而准确地进行实数运算是学好代数的必要条件，而实数的有关概念是理解和掌握实数运算法则的基础。本章的重点是实数的运算，实数概念中的难点在于分类，实数运算中的难点在于符号（化去绝对值符号、根号和括号时的符号处理及运算结果的符号处理）。

三、基本要求：通过本章学习，要求达到理解和掌握实数的有关概念，会对实数进行分类，掌握实数的运算法则和运算律，并能灵活运用法则和运算律，熟练地进行实数运算。

四、本章基础知识：

（一）实数的有关概念

1. 整数：包括正整数（即自然数）、零和负整数。

注意：整数有无数个，既没有最小的整数，也没有最大的整数，但有最小的正整数1。零是唯一没有性质符号的数。

2. 有理数：包括整数和分数。

说明：任何一个有理数，都可以表示成既约分数 $\frac{p}{q}$ 的

形式*。

3. 无理数：无限不循环小数，叫做无理数，象1, 1010010001..., π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\lg 3$ 等等都是无理数。

4. 实数：有理数和无理数，统称实数。

(1) 数轴：规定了原点、方向和单位长度的直线，叫做数轴。

实数和数轴上的点，有一一对应关系。

(2) 相反数：只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。

两个相反数的和为零。零的相反数是零。在数轴上原点两旁离开原点距离相等的两个点所表示的数是互为相反数。

(3) 倒数：1除以一个数的商，叫做这个数的倒数。或者说乘积为1的两个数互为倒数。

± 1 的倒数是它本身。零没有倒数。

(4) 绝对值：一个数的绝对值是指在数轴上表示这个数的点离开原点的距离。

实数 a 的绝对值：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(5) 非负数：正数和零，统称非负数。

(6) 算术根：一个非负数的非负方根，叫做这个数的算术根。

* 既约分数：分子、分母互质的分数叫做既约分数。

说明：①绝对值和算术根，都是非负数，而且 $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$ 。

②非负数的三种表示形式： $a^2 \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$, $|a| \geq 0$ 。

附：在进行实数运算时，还经常用到下面一些知识。

1. 偶数：能被2整除的整数，叫做偶数，任何偶数都可以表示 $2n$ (n 是整数) 的形式。

2. 奇数：不能被2整除的整数，叫做奇数，任何奇数都可以表示成 $2n-1$ (n 是整数) 的形式。

3. 质数：只能被1和它本身整除的大于1的自然数，叫做质数(素数)。如2, 3, 5, 7, 11, ...

注意：只有2既是偶数，又是质数。

互质数：最大公约数是1的两个自然数，叫做互质数。

4. 合数：除1和它本身外，还能被其它自然数整除的自然数，叫做合数。如4, 6, 8, 9...

注意：(1) 1既不是质数，也不是合数。

(2) 不能以数的奇偶性来分质数和合数。

5. 常见数的整除性特征：

(1) 被2整除：末位数字能被2整除；

(2) 被3整除：各数位上数字之和能被3整除；

(3) 被4整除：末两位数字能被4整除；

(4) 被5整除：末位数字是0或5；

(5) 被6整除：各数位上数字之和能被6整除的偶数。

(二) 实数大小的比较

1. 借助于数轴：在数轴上表示的两个实数，右边的数总比左边的数大。由此得到：正数大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数绝对值大的反而小。

2. 差值比较：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; \quad a-b=0 \Leftrightarrow a=b; \quad a-b<0 \Leftrightarrow a<b$$

(三) 实数的运算

1. 代数运算

(1) 在实数范围内, 可以进行加、减、乘、除、乘方和开方等运算, 但除数不能为零, 在开偶次方时, 被开方数是非负数. 其中加、减是一级运算; 乘、除是二级运算; 乘方和开方是三级运算.

(2) 运算法则:

一、二级运算 (见表1-1)

表1-1

运算		原数	同号两数		异号两数	
		法则	符号	绝对值	符号	绝对值
一级	加法		原号	相加	与绝对值较大者同号	相减
	减法		转化为加法, 即 $a-b=a+(-b)$			
二级	乘法		“+”	相乘	“-”	相乘
	除法		转化为乘法, 即 $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$			

三级运算 (见表1-2)

表1-2

运算		原数	正数		负数	
		法则	符号	绝对值	符号	绝对值
乘方	奇次		“+”	乘方	“-”	乘方
	偶次				“+”	
开方	奇次		“-”	开方	“-”	方开
	偶次	方根	“±”		实数范围内无意义	
	次	算术根	“+”			

注：零的乘方和开方都得零。

(3) 运算顺序和运算律。

① 同级运算，从左到右依次进行；

② 无括号的同级运算，先算高一级的；

③ 有括号时，先算小括号的，再算中括号的，最后算大括号的；

④ 为了计算简便，可根据运算律变更运算顺序（表见1—3）。

表1—3

运算律 \ 运算	加 法	乘 法
交 换 律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
结 合 律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
分 配 律	$a(b+c)=ab+ac$	

2. 指数运算和对数运算（详见第四章）。

3. 近似数和有效数字。

(1) 有效数字：一个近似数四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位，这时，从左边第一个不是零的数字起到这一位数字止，所有的数字，都叫做这个数的有效数字。

(2) 科学记数法，把一个数记成 $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$, n 是整数) 的形式，叫做科学记数法。

基 础 练 习

1. 判断题（对的打“√”，错的打“×”）。

(1) 任何一个负数都小于它的相反数 ()

(2) 任何整数都有倒数 ()

(3) 所有的小数都是有理数 ()

(4) 所有的分数都是有理数 ()

(5) $0.\dot{9}=1$ ()

(6) $|\sqrt{3}-2|=\sqrt{3}-2$ ()

(7) 无论 a 是什么实数, $|a-2| \neq -2$ ()

(8) $3+a$ 一定大于 3, $3-a$ 一定小于 3 ()

(9) $-2^2=4$ ()

(10) $\lg \frac{1}{2}$ 与 $\lg 2$ 互为倒数 ()

(11) $5^{\lg 2}=2$ ()

2. 选择题:

(1) 数轴上的点所表示的数是 ()

(A) 全体有理数; (B) 正数和负数; (C) 正数、负数和零; (D) 全体无理数.

(2) 无理数是 ()

(A) 无限小数 (B) 不尽方根; (C) 小数;
(D) 无限不循环小数.

(3) 下列说法正确的是 ()

(A) $\sqrt{-2}$ 是个负数; (B) 0 的相反数和倒数都是 0;
(C) a 是实数, 则 $|a|=\sqrt{a^2}$; (D) $\sqrt{4}=\pm 2$.

(4) 若 x^2 是正数, 则 x 一定是 ()

(A) 正数; (B) 负数; (C) 非负数; (D)

正数或负数.

• 本书中的选择题都是单项选择题, 即在给出的几个结论中有且只有一个结论是正确的.

(5) $(-a^3)^2$ 的结果是 ()

(A) a^5 ; (B) a^6 ; (C) $-a^5$; (D) $-a^6$.

(6) “20749” 保留三个有效数字的近似值是 ()

(A) 207; (B) 208; (C) 2.07×10^4 ;

(D) 2.08×10^4 .

3. 在整数 $-3, -1, 0, 1, 2, 5, 91, 257$ 中, 哪些是自然数? 哪些是奇数? 哪些是偶数? 哪些是质数? 哪些是合数?

4. 把下列各数分别填入相应的数集中, 并把其中的实数在数轴上表示出来.

$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \sqrt{2}, 0.\dot{3}, \pi$

有理数集 { ... } ;

无理数集 { ... } ;

实数集 { ... } .

5. 填空题:

(1) 如果 p, q 表示两个互质数, 那么形如 $\frac{p}{q}$ 的分数表示 _____ 数.

(2) n 表示三个连续整数中的中间一个数, 那么, 比它小的一个整数是 _____.

(3) 两个负数中, 绝对值大的数较 __. -0.3 与 $-\frac{1}{3}$ 的大小关系是 _____.

(4) 对于实数 a , $|a|$ 的几何意义是 _____.

(5) 数轴上离开原点4个单位长度的点所表示的数是 _____.

(6) 绝对值最小的数是_____.

(7) 一个数与它的倒数相等, 这个数是_____.

(8) 填表:

	1	0.5	-2	0	$1\frac{1}{3}$	$-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
相反数								
倒数								
绝对值								

(9) 把上题表中倒数一栏的数, 按从小到大的顺序用“<”号连接起来.

(10) 若 a 、 b 、 c 都是实数, 并且 $|a-1| + \sqrt{b+2} + (3-c)^2 = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$.

典 型 例 题

例1 把下列各数分别填入相应的数的集合内:

$$\sqrt{4}, 1.\dot{3}, \lg 1, \frac{1}{2}\log_2 2, \sqrt{3}\sin 60^\circ, \operatorname{ctg} 135^\circ,$$

$$\pi^0, -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, -0.1212212221\cdots, \lg 0.3$$

整数集合 { $\cdots$ } ;

有理数集合 { $\cdots$ } ;

负实数集合 { $\cdots$ } .

【分析】除了能直接根据定义判断的数, 如 $1.\dot{3}$ 是有理数, $-0.1212212221\cdots$ 是无理数外, 都要先对它们进行相应

的运算: $\sqrt{4}=2$, $\lg 1=0$, $\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}\sin 60^\circ$
 $=\frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg} 135^\circ=-1$, $\pi^0=1$, $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\lg 0.3=\lg 3-1$, 然后再根据要求, 填入相应的数的集合内.

【解】整数集合 $\{\sqrt{4}, \lg 1, \pi^0, \operatorname{ctg} 135^\circ, \dots\}$;

有理数集合 $\left\{\sqrt{4}, 1.3, \lg 1, \frac{1}{2}\log_2 2, \sqrt{3}\sin 60^\circ, \right.$
 $\left. \operatorname{ctg} 135^\circ, \pi^0, \dots\right\}$;

负实数集合 $\left\{\operatorname{ctg} 135^\circ, -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, -0.1212212221\dots, \right.$
 $\left. \lg 0.3, \dots\right\}$.

【小结】1. 在进行实数分类时, 不能凭形式分类, 如一见用根号表示的数, 有对数符号或三角符号表示的数, 就认为是无理数, 而应先进行相应的运算, 根据它的最终结果来分类.

2. 实数分类时, 最困难的是判断无理数, 判断无理数的方法有: ①根据定义, 无限不循环小数是无理数; ②肯定它不可能是有理数, 即不能表示成既约分数 $\frac{p}{q}$ 的形式. 初中里经常见到的无理数, 除了直接表示成无限不循环小数的形式外, 还有象 π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$; $\lg 2$, $\lg 3$, $\dots$; $\sin 18^\circ$, $\cos 27^\circ$, $\dots$ 等.

例2 写出绝对值大于2而小于或等于5的所有整数.

【分析】利用绝对值的几何意义, 借助数轴, 可以得

解：也可以先列出绝对值不等式解之。

【解法一】画数轴如图1—1。根据题设要求，符合要求的整数是 $-5, -4, -3, 3, 4, 5$ 。

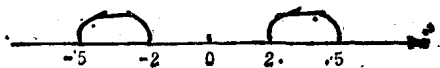


图1—1

【解法二】设要求的整数是 x ，根据题意，得 $2 < |x| \leq 5$

当 $x > 0$ 时， $2 < x \leq 5$ ， $\therefore x = 3, 4, 5$ 。

当 $x < 0$ 时， $2 < -x \leq 5$ ， $\therefore -5 \leq x < -2$

故 $x = -5, -4, -3$ 。因此符合要求的整数是 $-5, -4, -3, 3, 4, 5$ 。

【小结】1. 数形结合是解决数学问题的重要方法之一，利用数轴解决与绝对值有关的问题，体现了数形结合，它比之单纯的列式解题简捷得多。

2. 没有前提条件时，去掉绝对值符号，应分正数、负数和零三种情况，进行讨论。本题因为 x 显然不为零，故只分两种情况讨论，这种分类的思想方法，也是数学的重要思想方法，一般在分类时，要注意在同一个标准下逐一进行，既不能重复，也不能遗漏。

例3 已知 $a < 2$ ，且 $|a-2|=4$ ，求 a^3 的倒数的相反数。

【分析】应先求出满足条件的数 a ，然后分步求出 a^3 的倒数的相反数。

【解】 $\because a < 2$ ，且 $|a-2|=4$ ，则 $|a-2|=2-a=4$ ，
 $\therefore a = -2$ 。于是 $a^3 = (-2)^3 = -8$ 。

而 -8 的倒数是 $-\frac{1}{8}$ ， $-\frac{1}{8}$ 的相反数是 $\frac{1}{8}$ ，故所求