高等职业技术院校教材

数学

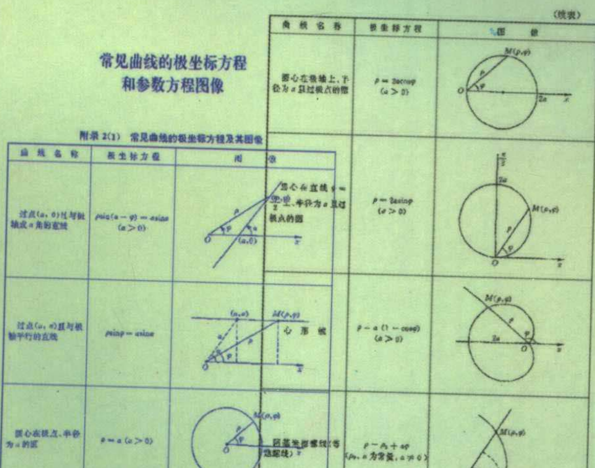
总主编　张圣勤　史　历

初等数学

（上）

主　编　邵师生

副主编　戚民驹　庄小红



复旦大学出版社

高等职业技术院校教材

数　学

总主编　张圣勤　史　历

初等数学（上）

主　编　邵师生
副主编　戚民驹　庄小红

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学．上/邵师生主编．—上海:复旦大学出版社，2000.7
高等职业技术院校教材
ISBN 7-309-02591-1
Ⅰ．初…　Ⅱ．邵…　Ⅲ．初等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ．O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33777 号

出版发行	复旦大学出版社
	上海市国权路 579 号　200433
	86 21 65102941(发行部)　86 21 65642892(编辑部)
	fupnet@fudanpress com　　http·//www fudanpress com
经销	新华书店上海发行所
印刷	江苏大丰印刷二厂
开本	850×1168　1/32
印张	7 5
字数	195 千
版次	2000 年 7 月第一版　2000 年 7 月第一次印刷
印数	1—8 000
定价	13 00 元

内 容 提 要

本教材共分五册，各册本着“降低理论要求，优化结构体系，加强实际应用，注重能力培养”的原则，在结构处理上和内容安排上力求做到学习理论知识与培养能力相结合，各册中还选配了大量的例题和习题。

本册是本教材中的一册，共分7章，内容包括集合与函数的一般概念，幂函数、指数函数与对数函数，任意角的三角函数及其图像、简化公式、三角恒等式，反三角函数及三角方程，复数等。

本册可作为招收初中毕业生的五年制和招收高中毕业生的三年制的高职、高专工科学生的数学教材，也可作为成人高职、高专的数学教材。

前　言

欢迎使用这本高职数学教材.本教材是根据现行全日制普通初级中学、高级中学数学教学大纲和五年制高职协作会高职数学教学基本要求,组织全国部分高等职业技术院校长期从事高职教学的教师及部分具有教学经验的重点中专学校数学教师编写的.主要适用于招收初中毕业生的五年制高职工科学生,其中三、四两册还适用于招收高中毕业生的三年制的高职工科学生,也可供高职成人教育和中专教育使用,也可作为一般工程技术人员参考书.

在本教材的编写过程中,作者本着“降低理论要求,优化结构体系,加强实际应用,注重能力培养”的原则,在教学内容上删去了一些繁琐的数学证明,力求把数学内容讲得简单易懂,加入了大量的例题和习题,以便于教师的教学和学生的自学;在结构处理上注意与现行初高中数学教学内容的衔接,结合理工科高职教育的特点照顾到专业教学的需要;在习题的编排上照顾到高职工科多专业的特点,力求做到理解数学知识和加强实际应用相结合,主观题和客观题相结合,学习理论知识与培养能力相结合,并力求做到习题难易搭配得当.为跟上计算机发展的步伐和加强学生的数学应用能力,本书特意增加了应用 MATHMATIC 软件的实验和数学建模的内容.书中带有 * 号的内容为选学内容.

本教材共分五册.第一册为初等数学(上);第二册为初等数学(下);第三册为高等数学;第四册为应用数学;第五册为数学实验.本册为初等数学(上),内容包括集合与函数的一般概念,幂函数、指数函数与对数函数,任意角的三角函数及其图像、简化公式、三角恒等式,反三角函数及三角方程,复数等.

本教材由上海电机技术高等专科学校张圣勤和西安航空技术高等

专科学校史历担任总主编.本册由山东轻工业经济管理学校邵师生任主编,由上海电机技术高等专科学校戚民驹和常州机械学校庄小红任副主编.各章编写人员是:第一章山东轻工业经济管理学校江锡科,第二、七两章庄小红,第三章上海电机技术高等专科学校解永跃,第四章戚民驹,第五章邵师生,第六章山东轻工业经济管理学校杨世华.

在本书的编写过程中,得到了各参编院校各级领导的关心和支持,同时也得到了北京防灾技术高等专科学校高盛义的支持和帮助,参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促,加之水平所限,虽经努力但教材中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本教材的师生多提意见,以便再版时更正.

编　者

2000 年 3 月

目　　录

第一章　集合与函数

集合是数学中最基本的概念之一，它的基本知识已在数学的各领域得到广泛应用.函数是数学中一个极其重要的概念，是学习高等数学、应用数学和其他科学技术的基础.本章先介绍关于一些集合的重要概念、常用符号和简单运算，并用它阐述函数的概念和有关的基本知识.

§1-1　集合的概念

一、集合的意义

先观察以下几组对象：

(1) 某校的全体学生；

(2) 某图书馆的全部藏书；

(3) 某工厂在某天内生产的所有冰箱.

这里所用“全体”、“全部”、“所有”都是指具有某种特定性质的对象的总体.

我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做集合，简称集.把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的*元素*.

例如，上面例子中的(1)是由这个学校全体学生组成的集合，学校的每一个学生都是这个集合的元素；(2)是由这个图书馆的全部藏书组成的集合，图书馆的每一本书都是这个集合的元素；(3)是由这家工厂在某天内生产的所有冰箱组成的集合，这一天生产的每一台冰箱都是这个集合的元素.

下面再举几个例子：

(4) 所有正整数组成一个集合，正整数 1，2，3，…都是这个集合

的元素，显然，这个集合有无限多个元素.

(5) 方程 $x^2-4=0$ 的所有实数根组成一个集合. 因为这个方程只有两个实数根 2 和 -2，所以这个集合有两个元素 2 和 -2.

(6) 不等式 $x-4\geqslant 0$ 的所有解组成一个集合. 因为不等式的解为 $x\geqslant 4$. 所以凡是不小于 4 的实数都是这个集合的元素. 显然，这个集合有无限多个元素.

(7) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点 (x, y) 组成一个集合. 因为曲线上的点的坐标都满足 $y=x^2$，所以点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 4)$, $(3, 9)$, …都是这个集合的元素. 显然，这个集合有无限多个元素.

(8) 所有大小不同的等边三角形组成一个集合. 边长为任意正数的每一个等边三角形都是这个集合的元素. 显然这个集合也有无限多个元素.

通常，我们用大写字母 A, B, C, …表示集合，而用小写字母 a, b, c, …表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，就记为"$a\in A$"，读作"a 属于 A"；若 a 不是集合 A 的元素，就记为"$a\notin A$"或"$a \overline{\in} A$"，读作"a 不属于 A".

例如，在上面的例(4)中，用 N 表示所有正整数(即自然数)组成的集合，则 $1\in \mathrm{N}$, $89\in \mathrm{N}$, $-2\notin \mathrm{N}$, $0\notin \mathrm{N}$.

由数组成的集合叫数集. 在已学过的数集中有自然数集、整数集、有理数集和实数集. 它们通常用表 1-1 所示的记号来表示.

表 1-1

名　称	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记　号	N	Z	Q	R

如果上述数集中的元素仅限于正数，就在集合记号的右上角标以"+"号；若数集中的元素都是负数，就在集合记号的右上角标"−"号. 例如，Z^+ 表示正整数集，R^- 表示负实数集.

一个"给定集合"的意思是指这个集合中的元素是确定的，就是说，根据集合的元素所具有的特定性质可判断出哪些对象是它的元素，哪些对象不是它的元素. 例如，对于自然数集 N，根据自然数的特定性质

可以判断出：$3 \in N$，而 $\sqrt{3} \notin N$，$\frac{1}{3} \notin N$. 又如，对于正整数集 Z^+，也可判断出：$3 \in Z^+$，而 $0 \notin Z^+$，$-3 \notin Z^+$.

如果集合只包含有限个元素，这样的集合叫做*有限集*. 如果集合包含无限多个元素，这样的集合叫做*无限集*.

例如，上面的例子中，(1)、(2)、(3)、(5)为有限集，而(4)、(6)、(7)、(8)为无限集.

本书讨论的数集，如无特殊说明，都是指由实数组成的集合. 本书对集合中的元素 x 可取实数的说明“$x \in R$”均省略不写.

二、集合的表示法

1. 列举法

列举法是指把属于某个集合的元素一一列出，写在花括写{ }内，每个元素仅写一次，不考虑顺序.

例如：所有小于 5 的自然数组成的集合可以表示为$\{1, 2, 3, 4\}$或$\{3, 4, 2, 1\}$等. 由于集合中每个元素只能写一次，因此不能写成$\{1, 2, 2, 3, 4, 4\}$等.

当集合的元素很多，不可能或不需要一一列出时，也可以写出几个元素，其他的用省略号表示. 例如，小于 1000 的自然数集可表示为$\{1, 2, 3, \cdots, 999\}$；正奇数集合可表示为$\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$.

2. 描述法

描述法是指把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在{ }内. 例如：

(1) 某图书馆的藏书所组成的集合可表示为

$$\{\text{某图书馆的藏书}\}.$$

(2) 不等式 $x-4 \geqslant 0$ 所有解的集合可表示为

$$\{x \mid x-4 \geqslant 0\} \text{ 或 } \{x : x-4 \geqslant 0\},$$

括号内“|”或“:”的左方表示集合中元素的一般形式，右方表示集合中元素所具有的特定性质.

(3) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点 (x, y) 组成的集合可表示为

$$\{(x, y) \mid y=x^2\} \text{ 或 } \{(x, y): y=x^2\}.$$

以上所讲的列举法和描述法是集合的两种不同表示法，实际运用时究竟选用哪种，依具体问题而定. 有些集合两种表示法都可选用，有些集合只能用其中的一种方法表示. 如，集合 $\{x \mid -3<x<3, x \in \mathrm{Z}\}$ 用的是描述法，满足条件 $-3<x<3$ 的所有整数为 $-2, -1, 0, 1, 2$，所以这个集合又可用列举法表示为 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 但是集合 $\{x \mid -3<x<3\}$ 由于无法将满足条件 $-3<x<3$ 的所有实数一一列出来，所以这个集合不能用列举法来表示.

由点组成的集合叫点集. 因为实数与数轴上的点是一一对应的，有序实数对与直角坐标平面内的点也是一一对应的，所以我们可以用数轴上的点所组成的点集来表示数集，用直角坐标平面内的点所组成的点集来表示有序实数对所组成的集合.

例 1 用点集来表示下面的集合：

(1) $\{x \mid 0<x \leqslant 2\}$； (2) $\{(x, y) \mid 0 \leqslant x<1, 0<y \leqslant 1\}$.

解 (1) 集合 $\{x \mid 0<x \leqslant 2\}$ 是一个数集，它可以用数轴上满足条件 $0<x \leqslant 2$ 的所有点所组成的点集来表示. 由图 1-1 容易看出，这个点集包含了线段 MN 上除点 M 外的所有点.

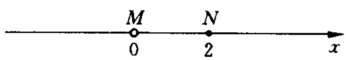


图 1-1

(2) 集合 $\{(x, y) \mid 0 \leqslant x<1, 0<y \leqslant 1\}$ 是有序实数对组成的集合，它可以用直角坐标平面内同时满足条件 $0 \leqslant x<1$ 及 $0<y \leqslant 1$ 的所有点组成的点集来表示. 由图 1-2 容易看出，这个点集包含了边长为 1 的正方形内部和边界 $\overline{OM}$（除 O 外）及 $\overline{MP}$（除 P 外）上的点，而边界 $\overline{ON}$ 和 $\overline{NP}$ 上的点不包含在这个点集中.

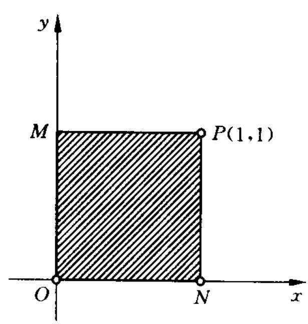


图 1-2

满足方程(组)或不等式(组)的所有解组成的集合叫做方程(组)或不等式(组)的解集.

例 2 写出下列各方程(组)和不等式(组)的解集:

(1) $4x^2-16=0$; (2) $\begin{cases}x-2y=0\\4x^2-y^2=15\end{cases}$;

(3) $x^2-3x+2\leqslant 0$; (4) $\begin{cases}2x-5\geqslant 0\\x+3>0\end{cases}$.

解 (1) 解方程 $4x^2-16=0$,得 $x_1=2$,$x_2=-2$,所以此方程的解集为$\{2,-2\}$.

(2) 解方程组 $\begin{cases}x-2y=0\\4x^2-y^2=15\end{cases}$,

得
$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases},\quad\begin{cases}x_2=-2\\y_2=-1\end{cases},$$

所以此方程组的解集为$\{(2,1),(-2,-1)\}$.

(3) 解不等式 $x^2-3x+2\leqslant 0$,

得
$$(x-1)(x-2)\leqslant 0,$$

即
$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-2\leqslant 0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x-1\leqslant 0\\x-2\geqslant 0\end{cases},$$

$$1\leqslant x\leqslant 2\quad\text{或}\quad\text{无解},$$

所以不等式的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

(4) 解不等式组 $\begin{cases}2x-5>0\\x+3>0\end{cases}$,

得
$$\begin{cases}x>\dfrac{5}{2}\\x>-3\end{cases},$$

即
$$x>\frac{5}{2},$$

所以此不等式组的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{5}{2}\right\}$.

三、单元素集与空集

前面讨论的集合，所含元素的个数至少有两个，但有时还会遇到下面的情况. 例如，方程 $x+4=0$，只有一个解 $x=-4$，所以方程的解集中只含有一个元素，即 $\{-4\}$；方程 $x^2+4=0$，在实数范围内没有解，即方程的解集中不含任何元素. 为讨论方便，给出下面的单元素集与空集的概念.

只含一个元素的集合叫做*单元素集*. 例如方程 $x+4=0$ 的解集 $\{-4\}$ 就是单元素集；又如集合 $\{x \mid x+4=4\}$ 也是单元素集 $\{0\}$，它只含一个元素"0".

不含有任何元素的集合叫做*空集*，记为 $\varnothing$. 例如，方程 $x^2+4=0$，在实数范围内的解集就是空集.

为叙述方便，我们把至少含有一个元素的集合叫做*非空集*.

应该注意：

(1) 空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的概念.

(2) 单元素集 $\{a\}$ 与单个元素 a 是两个不同的概念，前者是指由一个元素 a 组成的集合，后者指的就是这个元素 a.

四、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

先观察下面两个集合：

$$A:\{a, b, c\},$$

$$B:\{a, b, c, d\}.$$

可以发现，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素. 对于集合之间的这种关系，给出下面的定义：

定义 1 对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的子集，记为

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

因此$\{a, b, c\}$是$\{a, b, c, d\}$的子集，可记为

$$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$$

或
$$\{a, b, c, d\} \supseteq \{a, b, c\}.$$

对于一个非空集合A，因为它的任何一个元素都是集合A的元素，所以

$$A \subseteq A,$$

也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

由于空集是不含任何元素的集合，所以规定：空集$\varnothing$是任何集合A的子集，即

$$\varnothing \subseteq A.$$

定义 2 如果集合A是集合B的子集，且集合B中至少有一个元素不属于集合A，则集合A叫做集合B的真子集，记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

例如，$\{a, b, c\}$，不但是$\{a, b, c, d\}$的子集，而且还是它的真子集，可记为

$$\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}.$$

又如，自然数集 N 是整数集 Z 的真子集；有理数集 Q 是实数集 R 的真子集，可分别记为

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}; \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}.$$

由真子集的定义，还可以知道空集$\varnothing$是任何非空集合A的真子集，即$\varnothing \subset A$.

为了形象地说明集合之间的包含关系，通常用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示集合，而用圆中的点表示该集合的元素. 这样的图形称为文氏(Venn)图. 图 1-3 表示集合A是集合B的子集，确切地说，集合A是B的真子集.

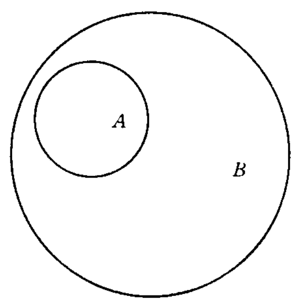


图 1-3

例 3 写出集合$\{0, 2, 4\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

解 集合$\{0, 2, 4\}$有三个元素 0，2，4. 它的子集为：空集$\varnothing$；任取一个元素组成的子集$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$；任取两个元素组成的子集$\{0, 2\}$，$\{0, 4\}\{2, 4\}$；三个元素全取所组成的子集$\{0, 2, 4\}$. 以上共有八个子集，其中除$\{0, 2, 4\}$外，其余七个都是真子集.

从例 3 可以发现，如果集合含有三个元素，则它的子集共有八个，恰好是 2^3；真子集的个数为 $2^3 - 1$.

例 4 讨论集合 $\{x \mid x^2 \leqslant 9\}$ 与集合 $\{x \mid |x| \leqslant 2\}$ 之间的包含关系.

解 设 A 表示集合 $\{x \mid x^2 \leqslant 9\}$，$B$ 表示集合 $\{x \mid |x| \leqslant 2\}$.

因为不等式 $x^2 \leqslant 9$ 的解为

$$-3 \leqslant x \leqslant 3,$$

所以集合 A 可表示为

$$\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

因为不等式 $|x| \leqslant 2$ 的解为

$$-2 \leqslant x \leqslant 2,$$

所以集合 B 可以表示为

$$\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}.$$

由图 1-4 可以看出，B 是 A 的真子集，即 $A \supset B$.

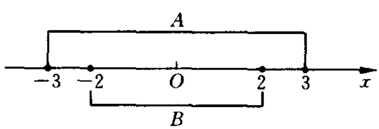


图 1-4

2. 集合的相等关系

定义 3 对于两个集合 A 和 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，则称集合 A 和 B 相等，记为

$$A = B.$$

两个集合相等，就表示两个集合的元素完全相同. 如，$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$.

容易看出，集合 $A = \{x | x^2 - 16 = 0\}$ 与集合 $B = \{-4, 4\}$ 是相等的，这时可直接写成 $\{x | x^2 - 16 = 0\} = \{-4, 4\}$.

例 5 讨论集合 $A = \{x | x^2 + 5x + 6 < 0\}$ 与集合 $B = \{x | -3 < x < -2\}$ 之间的关系.

解 解不等式 $x^2 + 5x + 6 < 0$，

得
$$(x + 2)(x + 3) < 0,$$
即
$$-3 < x < -2,$$
所以 $A = \{x | x^2 + 5x + 6 < 0\} = \{x | -3 < x < -2\}$.

因为集合 A 与集合 B 的元素完全相同，所以集合 A 与 B 是相等的，即 $A = B$.

习题 1-1

1. 写出下列集合的所有元素：

(1) 一年中有 30 天的月份的集合；

(2) 英文元音字母的集合；

(3) 大于 3 小于 21 的奇数的集合；

(4) 自然数中小于 20 的质数的集合；

(5) 方程 $(x - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 4) = 0$ 的实数根的集合；

(6) 万里长城所经过的省、市、自治区的集合.

2. 在下列各题中的____处填上符号 $\in$ 或 $\notin$：

(1) 2 ____ $\mathbf{N}$；　　(2) 0 ____ $\mathbf{Z}^+$；

(3) -3 ____ $\mathbf{Q}^-$；　　(4) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{R}$；

(5) $-\frac{3}{4}$ ____ $\mathbf{Q}$；　　(6) π ____ $\mathbf{Q}$.

3. 用列举法或描述法表示下列集合：

(1) 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星；

(2) 不等式 $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$ 的所有解；